

# MATEMATIKA DASAR



**Penulis :**

- Meilida Eka Sari
- Nur Hasanah
- Oktaviana Nirmala Purba
- Richard A.M. Napitupulu
- Wilminche M. D. E. L. Kelen
- Miduk Tampubolon
- Lucy Asri Purwasi
- Joni Wilson Sitopu
- Aldi Cahya Muhammad
- Ilfa Stephane



ISBN 978-623-8004-93-5



9 786238 004935

# **MATEMATIKA DASAR**

**Meilida Eka Sari  
Nur Hasanah  
Oktaviana Nirmala Purba  
Richard A.M. Napitupulu  
Wilminche M. D. E. L. Kelen  
Miduk Tampubolon  
Lucy Asri Purwasi  
Joni Wilson Sitopu  
Aldi Cahya Muhammad  
Ilfa Stephane**



**GET PRESS INDONESIA**

# **MATEMATIKA DASAR**

## **Penulis:**

Meilida Eka Sari

Nur Hasanah

Oktaviana Nirmala Purba

Richard A.M. Napitupulu

Wilminche M. D. E. L. Kelen

Miduk Tampubolon

Lucy Asri Purwasi

Joni Wilson Sitopu

Aldi Cahya Muhammad

Ilfa Stephane

**ISBN: 978-623-8004-93-5**

**Editor:** Mila Sari, M.Si.

Tri Putri Wahyuni, S.Pd.

**Penyunting:** Yuliatrini Novita, M.Hum.

**Desain Sampul dan Tata Letak:** Handri Maika Saputra, S.ST

**Penerbit:** GET PRESS INDONESIA

Anggota IKAPI No. 033/SBA/2022

## **Redaksi:**

Jl. Palarik RT 01 RW 06, Kelurahan Air Pacah  
Kecamatan Koto Tengah, Padang, Sumatera Barat

website: [www.getpress.co.id](http://www.getpress.co.id)

email: [adm.getpress@gmail.com](mailto:adm.getpress@gmail.com)

Cetakan pertama, November 2022

Hak cipta dilindungi undang-undang  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk  
dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit

## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillah, segala puji kepada Allah SWT atas ridho-Nya sehingga buku kolaborasi dengan judul Matematika Dasar dapat diselesaikan. Keberhasilan penyusunan buku ini tentu tidak akan terwujud tanpa adanya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada berbagai pihak yang telah mendukung dalam penerbitan buku ini. Buku ini tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Jika pembaca menemukan kesalahan apapun, penulis mohon maaf setulusnya. Kritik & saran akan selalu penulis terima dengan tangan terbuka.

Penulis, November 2022

## DAFTAR ISI

|                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>KATA PENGANTAR.....</b>                                                            | <b>i</b>  |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                                                               | <b>ii</b> |
| <b>BAB 1 KONSEP DASAR MATEMATIKA .....</b>                                            | <b>1</b>  |
| 1.1 Hakikat Matematika .....                                                          | 1         |
| 1.2 Pemahaman Konsep Matematika .....                                                 | 2         |
| 1.3 Indikator Pemahaman Konsep .....                                                  | 3         |
| 1.4 Karakteristik Perkembangan Pemahaman Konsep .....                                 | 6         |
| 1.5 Konsep Dasar Matematika. ....                                                     | 8         |
| 1.6 Penalaran dalam Matematika .....                                                  | 12        |
| 1.7 Berpikir Kritis dalam Matematika.....                                             | 14        |
| <b>BAB II SEJARAH MATEMATIKA .....</b>                                                | <b>19</b> |
| 2.1 Matematika .....                                                                  | 19        |
| 2.2 Sejarah Matematika.....                                                           | 20        |
| 2.3 Penerapan Sejarah Matematika.....                                                 | 23        |
| 2.4 Pendidikan Matematika .....                                                       | 24        |
| <b>BAB III SISTEM KOORDINAT CARTESIUS.....</b>                                        | <b>29</b> |
| 3.1 Letak Titik Pada Koordinat Cartesius .....                                        | 29        |
| 3.2 Jarak Dua Titik Pada Bidang Koordinat Cartesius.....                              | 32        |
| 3.3 Menentukan Koordinat Titik pada Suatu Garis dengan<br>Perbandingan Tertentu ..... | 34        |
| 3.4 Koordinat Cartesius pada Bidang.....                                              | 36        |
| 3.5 Koordinat Cartesius pada Ruang.....                                               | 39        |
| <b>BAB IV SISTEM BILANGAN .....</b>                                                   | <b>45</b> |
| 4.1 Pendahuluan .....                                                                 | 45        |
| 4.2 Notasi Bilangan Kompleks .....                                                    | 45        |
| 4.3 Konjugate Bilangan Kompleks.....                                                  | 45        |
| 4.4 Operasi Bilangan Kompleks.....                                                    | 46        |
| 4.5 Modulus (Nilai Absolut) .....                                                     | 48        |
| 4.6 Bentuk Polar (Kutub) Bilangan Kompleks.....                                       | 49        |
| 4.7 Bentuk Eksponensial Bilangan Kompleks .....                                       | 52        |
| 4.8 Pangkat Bilangan Kompleks .....                                                   | 54        |
| 4.9 Akar Bilangan Kompleks.....                                                       | 56        |

|                                                                              |                |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>BAB V FUNGSI .....</b>                                                    | <b>59</b>      |
| 5.1 Pendahuluan .....                                                        | 59             |
| 5.2 Pengertian Fungsi.....                                                   | 59             |
| 5.2.1 Domain, Kodomain dan Range suatu fungsi .....                          | 62             |
| 5.3 Sifat-sifat Fungsi.....                                                  | 62             |
| 5.3.1 Fungsi Injektif .....                                                  | 62             |
| 5.3.2 Fungsi Surjektif .....                                                 | 63             |
| 5.3.3 Fungsi Bijektif .....                                                  | 63             |
| 5.5 Jenis-jenis Fungsi.....                                                  | 63             |
| 5.5.1 Fungsi Konstan.....                                                    | 64             |
| 5.5.2 Fungsi Identitas .....                                                 | 64             |
| 5.5.3 Fungsi Linear.....                                                     | 65             |
| 5.5.4 Fungsi Kuadrat.....                                                    | 68             |
| <br><b>BAB VI TRIGONOMETRI .....</b>                                         | <br><b>73</b>  |
| 6.1 Pendahuluan .....                                                        | 73             |
| 6.2 Rumus Dasar .....                                                        | 73             |
| 6.3 Jumlah dan Selisih Sudut.....                                            | 80             |
| 6.4 Sudut Rangkap.....                                                       | 80             |
| 6.5 Rumus Jumlah, Selisih dan Hasil Kali Sinus Dan Cosinus .....             | 83             |
| 6.6 Fungsi $Y = a \cos x + b \sin x + c$ .....                               | 84             |
| 6.7 Grafik Fungsi Trigonometri .....                                         | 87             |
| 6.8 Pergeseran Grafik Fungsi Trigonometri.....                               | 89             |
| <br><b>BAB VII DIFERENSIASI DAN APLIKASINYA .....</b>                        | <br><b>97</b>  |
| 7.1 Pendahuluan .....                                                        | 97             |
| 7.2 Turunan Fungsi.....                                                      | 97             |
| 7.3 Aturan-Aturan Turunan Fungsi.....                                        | 100            |
| 7.4 Turunan Fungsi Trigonometri .....                                        | 111            |
| 7.5 Turunan dengan Notasi Leibniz .....                                      | 112            |
| 7.6 Turunan Tingkat Tinggi .....                                             | 112            |
| <br><b>BAB VIII INTEGRAL TAK TENTU .....</b>                                 | <br><b>117</b> |
| 8.1 Pendahuluan .....                                                        | 117            |
| 8.2 Definisi Integral sebagai Anti-Turunan.....                              | 117            |
| 8.2.1. Antiderivative.....                                                   | 118            |
| 8.2.2 Notasi dan Pengertian Integral Tak tentu .....                         | 119            |
| 8.2.3 Menggunakan Derivatif untuk Menurunkan Aturan Dasar<br>Integrasi ..... | 119            |

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| 8.3 Integral Subsitusi.....                       | 122        |
| 8.4 Integral parsial (integration by parts) ..... | 123        |
| 8.5 Rumus-rumus Integral Tak Tentu.....           | 126        |
| <b>BAB IX GEOMETRI .....</b>                      | <b>129</b> |
| 9.1 Definisi .....                                | 129        |
| 9.2 Konstruksi Dasar .....                        | 131        |
| 9.3 Teorema Phytagoras .....                      | 132        |
| <b>BAB X KOMBINATORIK .....</b>                   | <b>135</b> |
| 10.1 Pendahuluan .....                            | 135        |
| 10.2 Kaidah Pencacahan .....                      | 135        |
| 10.3 Kaidah Dasar Menghitung .....                | 136        |
| 10.3.1 Kaidah Penjumlahan .....                   | 136        |
| 9.3.2 Kaidah Perkalian.....                       | 137        |
| 10.4 Permutasi.....                               | 140        |
| 10.4.1 Permutasi $n$ Objek .....                  | 141        |
| 10.4.2 Permutasi $r$ Obyek dari $n$ Obyek.....    | 142        |
| 10.4.3 Permutasi Siklik.....                      | 143        |
| 10.4.4 Permutasi Majemuk .....                    | 144        |
| 10.5 Kombinasi .....                              | 145        |
| 10.5.1 Kombinasi $n$ Objek .....                  | 145        |
| 10.5.2 Kombinasi $r$ Objek dari $n$ Objek.....    | 146        |
| <b>BIODATA PENULIS</b>                            |            |

# **BAB 1**

## **KONSEP DASAR MATEMATIKA**

**Oleh Meilida Eka Sari**

### **1.1 Hakikat Matematika**

Secara bahasa kata “Matematika” berasal dari bahasa Yunani yaitu “Mathema” atau “Mathematikos” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Matematika suatu alat untuk mengembangkan cara berpikir secara umum didefinisikan sebagai ilmu yang mempelajari pola dari struktur, perubahan dan ruang. Maka secara informal dapat juga disebut sebagai ilmu bilangan dan angka. Dalam pandangan lain bahwa matematika adalah ilmu dasar yang mendasari ilmu pengetahuan lain (Hariwijaya, 2009).

Menurut suherman matematika tumbuh dan berkembang karena proses berpikir, oleh karena itu logika adalah dasar untuk terbentuknya matematika. Logika adalah masa bayi dari matematika, sebaliknya matematika adalah masa dewasa dari logika. Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif, tidak menerima generalisasi berdasarkan pengamatan (induktif) tetapi harus berdasarkan pembuktian deduktif (Erman, Suherman dkk. 1992)

Menurut W.W. Sawyer bahwa matematika adalah klarifikasi studi dari semua kemungkinan pola. Pola yang dimaksud semua jenis keteraturan yang dapat dimengerti pikiran kita. Setiap teori matematika harus memperhitungkan kekuatan matematika yaitu aplikasinya terhadap ilmu lain sains yang utama dan kaidah matematika. Terlihat dini matematika bukanlah ilmu yang hanya untuk keperluan

dirinya sendiri, tetapi yang bermanfaat sebagian besar ilmu-ilmu yang lain (Herman Hudojo. 1988)

Matematika dari penjelasan diatas adalah suatu pola yang tumbuh dan berkembang dalam kehidupan yang tercipta dari proses berpikir yang akan menciptakan pola keteraturan dan struktur yang terorganisasi, mulai dari unsur yang tidak didefinisikan, ke aksioma atau postulat dan akhirnya ke dalil. Selain itu matematika memberikan bahasa, proses dan teori yang memberikan ilmu suatu bentuk dan kekuasaan. Metode matematis memberikan inspirasi kepada pemikir dibidang sosial dan ekonomi. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi disiplin ilmu teknik. Disamping itu, pemikir matematis memberikan warna kepada kegiatan seni lukis, arsitektur dan seni musik. Dalam dunia perbankan dan ekonomi matematika sebagai penopang maju mundurnya suatu Negara, karena di era pasar sekarang ini semua harus dihitung dan dijalankan secara matematis. Dengan ilmu matematika, dapat untuk mengembangkan semua hal sesuai dengan pola pikir kita. Sesuai dengan kaidah-kaidahnya matematika dianggap sebagai ilmu yang menuntut pola pikir secara terstruktur. Oleh karena itu peran matematika dapat dikatakan hampir di semua sendi kehidupan dan mendukung dalam upaya memajukan kehidupan manusia.

## **1.2 Pemahaman Konsep Matematika.**

Pemahaman konsep merupakan suatu aspek yang sangat penting dalam pembelajaran, karena dengan memahami konsep siswa dapat mengembangkan kemampuannya dalam setiap materi pelajaran. Pemahaman konsep terdiri dari dua kata yaitu pemahaman dan konsep. Pemahaman dapat didefinisikan sebagai suatu proses memahami arti atau makna tertentu dan kemampuan menggunakannya pada situasi lainnya (Depdiknas : 2006). Sejalan dengan pendapat tersebut,

Driver dan Leach (dalam Hasana : 2004) pemahaman adalah kemampuan untuk menjelaskan suatu situasi atau suatu tindakan.

Pemahaman dimana tingkat kemampuan yang mengharapkan siswa mampu memahami arti atau konsep, situasi atau fakta yang diketahuinya serta mampu membedakan, menduga, mengeneralisasikan, menyimpulkan, memberikan contoh, menuliskan kembali, memperkirakan serta menyelesaikan masalah. Konsep adalah ide yang digunakan atau memungkinkan seseorang untuk mengelompokkan atau menggolongkan sesuatu objek (Wardhani : 2008). Senada dengan hal itu, Konsep merupakan ide abstrak yang digunakan untuk menggolongkan sekumpulan objek (Dimiyati : 2002).

Konsep Matematika adalah segala sesuatu yang berwujud pengertian-pengertian, ciri khusus, hakikat dan nilai dari materi matematika (Dalam Gusniwati : 2015). Pemahaman konsep adalah suatu kemampuan menemukan ide abstrak dalam matematika untuk mengklasifikasikan objek-objek yang biasanya dinyatakan dalam suatu istilah kemudian dituangkan kedalam contoh dan bukan contoh, sehingga seseorang dapat memahami suatu konsep dengan jelas (Gusniwati :2015).

Berdasarkan pendapat diatas dapat disimpulkan bahwa pemahaman konsep merupakan suatu kemampuan ide abstrak dalam matematika untuk mengklasifikasikan objek-objek yang biasanya dinyatakan dalam suatu istilah kemudian dituangkan kedalam contoh suatu konsep yang jelas.

### **1.3 Indikator Pemahaman Konsep**

Salah satu kecakapan dalam matematika yang penting dimiliki oleh siswa adalah pemahaman konsep. Untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep diperlukan alat ukur (indikator). Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas

Nomor 506/C/Kep/PP/2004 tanggal 11 November 2004 bahwa indikator pemahaman konsep matematika adalah mampu :

1. Menyatakan ulang sebuah konsep.
2. Mengklasifikasi objek menurut sifat-sifat tertentu sesuai dengan konsepnya.
3. Memberi contoh dan bukan contoh dari suatu konsep.
4. Menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematika.
5. Mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup dari suatu konsep.
6. Menggunakan dan memanfaatkan serta memilih prosedur atau operasi tertentu.
7. Mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan masalah.

Menurut KTSP (Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan) Tahun 2006 bahwa indicator pemahaman konsep adalah mampu :

1. Menyatakan ulang sebuah konsep,
2. Mengklasifikasi objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya),
3. Memberi contoh dan non contoh dari konsep,
4. Menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematika,
5. Mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup dari suatu konsep,
6. Menggunakan dan memanfaatkan serta memilih prosedur atau konsep,
7. Mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.

Berdasarkan indikator pemahaman konsep dari berbagai sumber, indicator pemahaman konsep yang digunakan dimana:

1. Menyatakan ulang sebuah konsep.  
mengukur kemampuan siswa dalam menyatakan ulang sebuah konsep dengan bahasanya sendiri, yang berarti kemampuan siswa untuk menyatakan kembali konsep dengan bahasanya sendiri.
2. Mengklasifikasi objek menurut sifat-sifat tertentu sesuai dengan konsepnya.  
Kemampuan siswa dalam mengelompokkan suatu masalah berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki yang terdapat pada materi.
3. Memberi contoh dan bukan contoh dari suatu konsep.  
Kemampuan siswa dalam membedakan mana yang termasuk contoh dan bukan contoh dari konsep
4. Menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematika.  
Kemampuan siswa dalam menyajikan konsep kedalam gambar atau symbol secara berurutan yang bersifat matematika.
5. Mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup dari suatu konsep.  
kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah sesuai dengan prosedur berdasarkan syarat cukup yang telah diketahui.
6. Menggunakan dan memanfaatkan serta memilih prosedur atau operasi tertentu.  
Kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah dengan memilih dan memanfaatkan prosedur yang ditetapkan, indikator pemahaman konsep.
7. Mengaplikasikan konsep atau algoritma pada pemecahan masalah.

Kemampuan siswa dalam mengaplikasikan suatu konsep dalam pemecahan masalah berdasarkan langkah-langkah yang benar.

#### **1.4 Karakteristik Perkembangan Pemahaman Konsep**

Teori perkembangan mental yang dikemukakan Jean Piaget (Russeffendi : 1991) ada empat tahapan perkembangan kognitif anak, yaitu sebagai berikut :

1. Tahap sensori motor, dari lahir hingga usia 2 tahun
2. Tahap pre-operasi, usia dari 2 – 7 tahun.
3. Tahap operasi konkret, usia dari sekitar 7 tahun sampai sekita 12 tahun.
4. Tahap operasi formal, usia dari sekitar 11 tahun sampai dewasa.

Tahap perkembangan operasi konkret ini dimana tahao yang dialami anak-anak sekolah dasar pada umumnya, anak dapat memahami operasi (logis) dengan bantuan benda-benda konkret. Jadi yang dimaksud operasi dengan bantuan benda-benda konkret di sini adalah tindakan atau perbuatan mental mengenai kenyataan dalam kehidupan nyata. Jadi anak-anak tidak perlu atau harus selalu dengan bantuan benda-benda konkret ketika melakukan operasi. Akan tetapi ada kemungkinan, anak-anak masih kesulitan membuat generalisasi verbal dari contoh-contoh yang serupa. Oleh karena itu, anak-anak pada tahap ini dapat dikelompokkan ke dalam taraf berpikir konkret yaitu selalu memerlukan bantuan benda-benda konkret atau taraf berpikir semi konkret, artinya taraf berpikir semi abstrak yaitu dapat mengerti dengan bantuan diagram, torus atau sejenisnya. Serta dapat berada pada taraf berpikir abstrak yaitu dapat mengerti tanpa bantuan benda-benda real, gambar ataupun diagramnya.

Adapun ciri-ciri tahap operasi konkret adalah sebagai berikut :

1. Pada permulaan tahap ini, egoismenya mulai berkurang. Anak mulai bersedia bermain dengan teman-temannya, tukar menukar mainan dan lainnya.
2. Dapat mengelompokkan benda-benda yang mempunyai beberapa karakteristik ke dalam himpunan dan bagian himpunan dengan karakteristik khusus dan dapat melihat beberapa karakteristik suatu benda secara serentak
3. Mampu berkecimpung dalam hubungan kompleks antara kelompok-kelompok, dapat membalikkan operasi operasi dan prosedur serta dapat melihat "langkah (keadaan) antara dari suatu perubahan. Misalnya keadaan antara ayahnya pergi ke kanto dan pulang kantor, langkah anatar matahari terbit dan terbenam dan lain-lain.
4. Jika pada tahap pre-opsional memahami konsep kekekalan itu belum dimiliki, tetapi pada tahap ini sudah dimilikinya. Bahkan pada akhir tahap ini, anak sudah dapat memahami konsep kekekalan isi.
5. Mampu melihat sudut pandangan orang lain. Pada tahap ini, anak belajar membedakan antara perbuatan salah yang disengaja dengan kesalahan yang tidak sengaja.
6. Dapat menyelesaikan soal seperti  $\square - 3 = 5$ .
7. Dapat menggunakan tambang panjang 3, 4, dan 5 m dan bilangan Pythagoras lainnya untuk membuat segitiga siku-siku.
8. Anak-anak pada tahap ini senang membuat benda bentukan, memanipulasi benda dan membuat alat mekanis.
9. Pada akhir tahap ini, anak dapat memberikan alasan deduktif dan induktif, tetapi masih banyak memandang contoh berurutan dari suatu prinsip umum seperti hal-hal yang tidak berhubungan

10. Berpikirnya lebih dinamis, berpikir ke depan ke belakang dalam suatu struktur atau konteks.
11. Masih kesulitan untuk menjelaskan peribahasa dan tidak mampu melihat arti yang tersembunyi, tetapi ia mulai dapat memahami orang yang berjenaka.
12. Anak jarang dapat membuat definisi deskriptif yang tepat, meskipun demikian ia dapat mengingat-ingat definisi buatan orang lain dan mengatakan kembali apa yang dihafalkan
13. Masih kesulitan memahami abstraksi verbal.

### **1.5 Konsep Dasar Matematika.**

Matematika merupakan ilmu dasar yang sudah menjadi dalam mempelajari ilmu-ilmu yang lain. Oleh karena itu penguasaan terhadap matematika mutlak diperlukan dan konsep-konsep matematika harus dipahami dengan betul dan benar sejak dini. Hal ini karena konsep-konsep dalam matematika merupakan suatu rangkaian sebab-akibat. Suatu konsep disusun berdasarkan konsep-konsep sebelumnya dan akan menjadi dasar bagi konsep-konsep selanjutnya, sehingga pemahaman terhadap konsep-konsep selanjutnya. Pemahaman suatu konsep matematika secara benar mutlak diperlukan oleh seorang pendidik sebelum mulai mengajarkan pada peserta didik. Upaya ini sangat mendesak untuk dilakukan yang nantinya akan mengajarkan konsep-konsep awal matematika.

Matematika merupakan bidang ilmu yang diajarkan dan digunakan oleh semua jenjang pendidikan, yang dimulai dari tingkat SD sampai perguruan tinggi. Aplikasi dan kegunaan matematika digunakan dalam semua disiplin ilmu, seperti sejarah, ipa, ilmu sosial dan lain-lain, Hal ini menunjukkan bahwa matematika merupakan induk dari semua ilmu. dengan belajar matematika diharapkan mampu memberikan kemudahan dan menjalankan aktivitas kehidupan, terutama

berkaitan dengan perhitungan seperti jual beli, hutang piutang dan lain-lain (Agustianti dkk, 2022). Matematika disebut juga ratu sekaligus pelayan bagi ilmu yang lain, karena dalam perkembangannya matematika mampu berdiri tanpa bergantung pada ilmu yang lain. Matematika disebut pelayan karena mampu memberikan pelayanan bagi ilmu yang lain dalam mengembangkan diri dari segi teori maupun aplikasinya (Kamarullah : 2017).

Pada dasarnya, seorang pendidik harus menguasai konsep-konsep matematika dengan benar dan mampu menyajikan secara menarik, karena menurut teori perkembangan kognitif Piaget, perkembangan kognitif anak khususnya sekolah dasar berada pada tingkat operasional formal yakni peserta didik akan mampu memahami suatu konsep jika mereka memanipulasi benda-benda kongkrit. Berangkat dari standar kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang pendidik matematika dan inisiatif untuk memberikan bekal yang cukup dalam memahami dan menyajikan konsep-konsep matematika secara benar dan menarik.

Dalam pembelajaran matematika, akan sangat erat kaitannya dengan bilangan. Bilangan adalah suatu unsur dalam matematika yang tidak dapat didefinisikan, artinya bahwa bilangan itu adalah sesuatu yang abstrak. Jika ditinjau kembali dimana perkembangan mental peserta didik berada pada taraf operasional konkret. Kedua hal tersebut saling bertolak belakang (Isrok'atun, 2021). Peserta didik hanya bisa memahami sesuatu yang nyata (konkret, atau semi konkret sementara pendidik akan mengajar (memberi konsep) materi yang bersifat abstrak. Jadi hal yang kita butuhkan disini supaya apa yang disampaikan penanaman konsep pembelajaran matematika dapat dipahami adalah bagaimana mewujudkan sesuatu yang hakikatnya abstrak tetapi akan terlihat konkret atau nyata bagi peserta didik. Tentunya, kita butuh alat peraga atau media semi konkret atau bahkan alat peraga konkret.

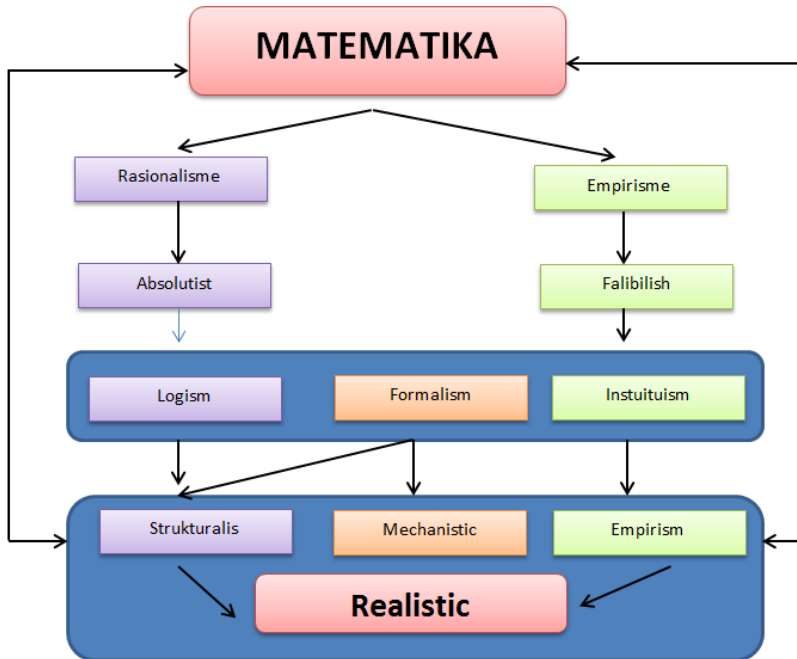
Matematika memiliki peranan yang sangat penting dalam peradaban sosial dari masa sejarah hingga masa sekarang. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi selalu dikaitkan dengan ilmu matematika. Matematika menjadi alat bantu dalam menerapkan ilmu-ilmu yang lain serta pengembangan matematika itu sendiri. Oleh karena itu, penguasaan matematika kepada peserta didik menjadi tujuan yang harus tercapai. Matematika diharapkan dapat menata pola nalar berpikir peserta didik serta menjadi dasar yang logis dalam pengambilan keputusan di era persaingan yang semakin kompetitif ini. (Siagian, 2016)

Ciri-ciri matematika menurut Soedjadi adalah 1) objek dalam matematika bersifat abstrak (tidak konkret), 2) matematika merupakan ilmu hasil dari kesepakatan dari para ahli, jadi bukan hasil pemikiran seorang saja, tetapi berbagai pikiran dari para ahli yang diambil kesepakatan bersama, 3) matematika merupakan pola pikir yang deduktif, 4) bahasa dalam matematika menggunakan symbol-simbol, notasi dan lambang, 5) memperhatikan apa yang menjadi pokok pembahasan semesta, 6) matematika merupakan ilmu yang konsisten. Objek matematika bersifat abstrak, tidak bisa dilihat, disentuh atau dirasakan, tetapi memiliki manfaat besar dalam peradaban sosial dan dalam tatanan kehidupan manusia (Soedjadi.2000).

Matematika merupakan bahasa symbol, karena banyak sekali symbol-simbol yang digunakan dalam matematika. Rangkaian dari symbol-simbol tersebut dapat membentuk model matematika. Penggunaan dalam matematika harus jelas ruang lingkupnya. Jika symbol yang digunakan berkaitan dengan bilangan maka diartikan bilangan. Jika pembahasannya tentang transformasi maka symbol-simbol itu diartikan transformasi (Susanto, 2012). Fakta yang ada dalam kehidupan diungkap oleh matematika dengan symbol "2" menunjukkan bilangan "dua". Konsep adalah ide yang bersifat abstrak

digunakan untuk mengklasifikasikan beberapa objek termasuk konsep atau bukan. Contoh konsep persegi, sehingga dapat menggolongkan beberapa objek sebagai contoh persegi. Operasi adalah aturan untuk mendapatkan satu elemen dari beberapa elemen seperti penjumlahan, perkalian, gabungan, irisan dan sebagainya. Prinsip dalam matematika adalah objek yang dimiliki kompleks. Prinsip dapat diartikan dengan keterkaitan antara semua objek dasar dalam matematika. Misalnya aksioma, teorema dan sifat.

Konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang untuk mendefinisikan dan menentukan apakah peristiwa atau objek merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak, himpunan, himpunan bagian, persamaan, pertidaksamaan, bangun ruang, jari-jari dan pangkat adalah contoh konsep. Suatu konsep dipelajari dengan mendengar, melihat, menangani, mendiskusikan atau memikirkan berbagai contoh dan bukan contoh dari konsep dan dengan membandingkan contoh dan bukan contoh. Seseorang telah mempelajari suatu konsep ketika dia mampu memisahkan contoh konsep dari bukan contoh.



Bagan 1.1 Skema Matematika

## 1.6 Penalaran dalam Matematika

Setiap orang pernah dan bahkan hampir setiap saat melakukan kegiatan berpikir karena setiap kesan yang ditangkap oleh panca inderanya selalu akan diproses di dalam alam pikirannya. Melihat suatu kejadian, orang akan berpikir tentang penyebabnya, bagaimana kronologisnya kejadiannya, siapa saja yang mengalai, bagaimana kondisi mereka, bagaimana kelanjutan peristiwanya atau apa yang harus dilakukan menanggapi peristiwa tersebut atau seandainya orang acuh atak acuh terhadap peristiwa yang dilihatnya, paling tidak ia akan berpikir.

Konsep-konsep yang muncul dalam setiap bidang ilmu pasti merupakan hasil dari suatu proses penalaran dari suatu

proses penalaran, terlebih dalam bidang matematika. Matematika pada hakekatnya berkenaan dengan struktur dan ide-ide abstrak yang disusun secara sistematis dan logis melalui proses penalaran deduktif. Oleh karenanya untuk dapat memahami bagaimanakah pola penalaran dan kaidah-kaidah logika yang digunakan sebagai alat berpikir kritis dalam matematika.

Mempelajari matematika kurang tepat bila dilakukan dengan cara menghafal. Karena konsepnya yang berkenaan dengan obyek-obyek abstrak dan ditampilkan dengan menggunakan symbol-simbol, maka matematika dapat dipelajari dengan baik dengan cara mengerjakan latihan-latihan. Dalam proses bekerja tersebut, mulai dari merumuskan masalah, merencanakan penyelesaian, mengkaji langkah-langkah penyelesaian, membuat dugaan bila data yang disajikan kurang lengkap dan juga membuktikan teorema-teorema, diperlukan sebuah kegiatan berpikir yang disebut berpikir kritis. Dalam proses berpikir kritis ini, orang akan mengolah data dan atau fakta, merangkainya dalam suatu alur pemikiran yang sistematis dan logis didasarkan pada kaidah-kaidah yang berlaku untuk menghasilkan sebuah kesimpulan atau keputusan. Berkenaan dengan hal ini, ada dua pola penalaran yang dapat dipergunakan orang untuk menarik sebuah kesimpulan atau membuat suatu keputusan yakni pola penalaran induktif dan pola penalaran deduktif.

Dalam pembelajaran matematika agar mudah dimengerti oleh peserta didik, proses penalaran induktif dapat dilakukan pada awal pembelajaran dan kemudian dilanjutkan dengan proses penalaran deduktif untuk menguatkan pemahaman yang sudah dimiliki peserta didik. Matematika berfungsi untuk mengembangkan kemampuan bernalar melalui kegiatan penyelidikan, eksplorasi dan eksperimen sebagai alat pemecahan masalah melalui pola pikir dan model matematika serta sebagai alat komunikasi melalui symbol, tabel,

grafik, diagram dalam menjelaskan gagasan. Adapun tujuan pembelajaran matematika adalah melatih cara berpikir secara sistematis, logis, kritis, kreatif dan konsisten (Depdiknas, 2004 : 19)

Kemampuan matematika adalah sadar akan proses dan berpikir secara mandiri serta logis dalam memahami penyelesaian masalah matematika. Kemampuan matematika dapat terbentuk dari pelatihan-pelatihan mengerjakan soal-soal matematika. Kemampuan matematika peserta didik dapat dikategorikan menjadi tiga kemampuan yaitu kemampuan matematika rendah, kemampuan matematika sedang dan kemampuan matematika tinggi. Semakin tinggi kemampuan maka semakin tinggi pula proses berpikir dalam menyelesaikan masalah terkait matematika.

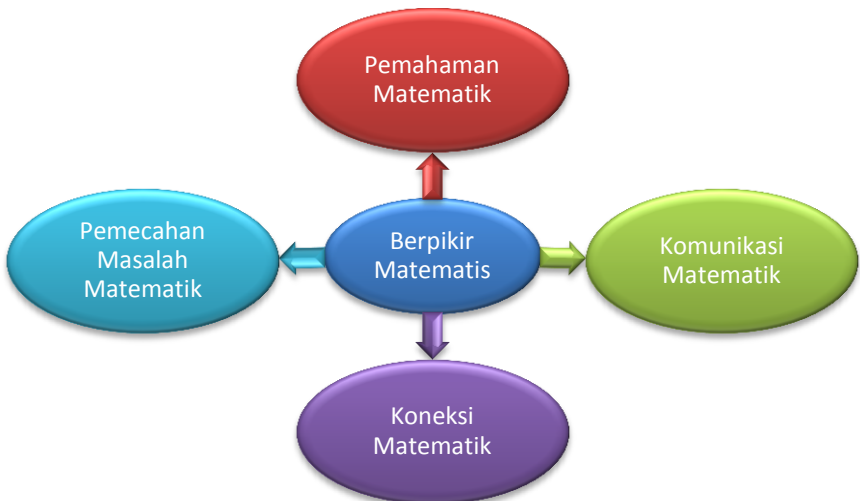
### **1.7 Berpikir Kritis dalam Matematika**

Matematika berupaya memahami pola yang terjal, baik dalam dunia nyata maupun abstrak. Berdasarkan jenisnya berpikir kritis dapat diklasifikasikan dalam lima kompetensi utama yaitu :

1. Pemahaman Matematik meliputi mengenal, memahami dan menerapkan konsep, prosedur, prinsip dan ide-ide matematika
2. Pemecahan masalah matematik, kemampuan ini tergolong kemampuan berpikir tingkat tinggi.
3. Penalaran matematik.
4. Koneksi matematik, dimana mencar hubungan antar topik matematik, menerapkan matematika dalam bidang laen, dalam kehidupan sehari-hari, memahami representasi ekuivalensi (penempatan hubungan sebanding) suatu konsep, mencari hubungan satu prosedur dengan prosedur lainnya dalam representasi ekuivalen dan

menerapkan hubungan antar topic matematika dengan topic diluar matematika

5. Komunikasi matematik, kemampuan yang menyatakan situasi ke dalam model matematik, menjelaskan ide, menulis ide, menulis tentang matematika, membaca dengan pemahan dan mengungkapkan kembali suatu uraian matematika dalam bahasa sendiri



Bagan 1.2 Klasifikasi Kompetensi Berpikir Kritis Matematik

Adapun tahapan aktivitas dalam proses berpikir matematis (Mason : 2010) sebagai berikut :

1. Fase masuk (*entry phase*)

mengatasi suatu pertanyaan memulai untuk mencoba memecahkannya serta mengkhususkan untuk menemukan apa yang diketahui dan apa tujuan dari pertanyaan. Selain itu, menuliskan kembali pokok-pokok dari pertanyaan

dengan menggunakan kata-kata sendiri akan sangat membantu.

2. Fase menyelesaikan (*attack phase*)  
mengambil beberapa caranpendekatan yang dapat dilakukan serta merumuskan dan mencoba rencana maka akan dapat kemajuan yang baik dalam menyelesaikan masalah. Pengetahuan tentang teknik, prinsip atau konsep matematika.
3. Fase meninjau ulang (*review phase*)  
membantu apakah fase review proses berpikir matematika dalam pemecahan masalah sudah benar dan apakah masalah telah dapat diselesaikan dengan memeriksa kembali (meninjau ulang) hasil pekerjaannya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Hariwijaya. 2009. Meningkatkan Kecerdasan Matematika. Yogyakarta : Tugupublier.
- Erman, Suherman dkk. 1992. Strategi Belajar Mengajar Matematika. Jakarta : Universitas Terbuka.
- Herman Hudojo. 1988. Mengajar Matematika. Jakarta : Delia Press.
- Dimiyati dan Mudjiono. 2002. Belajar dan Pembelajaran. Jakarta : Rineka Cipta.
- Susanto, H. A. 2012. Nilai Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Pembentukan Kepribadian. Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran, 19(1), pp. 116-124
- Agustianti, Rifka, dkk. 2022. Filsafat Pendidikan Matematika. Padang : PT. Global Eksekutif Teknologi
- Kamarullah. Pendidikan Matematika di Sekolah Kita. Al Khawarizmi, 1(1), pp.21-32 : 2017.
- Gusniwati, Mira. 2015. Pengaruh Kecerdasan Emosional dan Minat Belajar Terhadap Penguasaan Konsep Matematika Siswa SMAN di Kecamatan Kebon Jeruk. Jurnal Formatif, 5(1): 26-41.
- Peraturan Dirjen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/Kep/PP/2004 tanggal 11 November 2004
- Russeffendi E.T. Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA. Bandung: Tarsito.1991
- Isrok'atun. 2021. Memahami Konsep Dasar Matematika untuk PGSD. Bandung : Bumi AKsara
- Siagian, M. D, 2016. Kemampuan Koneksi Matematika dalam Pembelajaran Matematika, MES (Journal of Mathematics Education dan Science), pp.58-67
- Soedjadi. 2000. Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia. [http : Dirjend Perguruan Tinggi DEPDIKNAS](http://DirjendPerguruanTinggiDEPDIKNAS)

Mason, J.,L. Burton, & K. Stacey. Thinking Mathematically.  
Wokingham, UK : Addison Wesley. 2010

# BAB II

## SEJARAH MATEMATIKA

Oleh Nur Hasanah

### 2.1 Matematika

Matematika diambil dari salah satu kata dalam bahasa latin "mathemata" yang memiliki arti "sesuatu yang dipelajari". Sedangkan matematika di dalam bahasa Belanda dikenal dengan sebutan "wiskunde" yang memiliki arti "ilmu pasti" yang secara umum dapat diartikan bahwa matematika merupakan sebuah ilmu pasti yang berkaitan dengan suatu penalaran yang ada pada dalam diri manusia dan juga merupakan salah satu ilmu yang mendasari kehidupan manusia.

Awal ditemukannya, matematika terus berkembang secara dinamis seiring dengan perubahan zaman. Perkembangannya tidak pernah berhenti karena matematika akan terus dibutuhkan dalam berbagai sisi kehidupan manusia (Efendi *et al.*, 2021). Matematika berasal dari bahasa latin "methematika" yang mulanya diambil dari bahasa yunani "mathematike" yang berarti mempelajari.

Perkataan itu mempunyai asal kata mathema yang berarti pengetahuan atau ilmu. Kata mathematike berhubungan pula dengan kata lainnya yang hampir sama yaitu mathein atau mathenein yang artinya belajar. Jadi, berdasarkan asal katanya maka matematika berarti ilmu pengetahuan yang didapat dengan berpikir. Bahasa symbol, matematika adalah bahasa numrik.

Matematika juga dikatakan studi besaran, struktur, ruang dan suatu perubahan. Matematika yang digunakan diseluruh

dunia dan merupakan alat yang penting berbagai bidang termasuk ilmu alam, teknik, kedokteran atau medis, dan ilmu sosial seperti ekonomi dan psikologi. Para matematikawan juga bergulat didalam matematika murni, atau matematika untuk perkembangan matematika itu sendiri, tanpa adanya penerapan didalam pikiran, meskipun penerapan praktis yang menjadi latar munculnya matematika murni ternyata seringkali ditemukan kemudian.

Berdasarkan Permendikbud Nomor 22 Tahun 2016 tujuan pembelajaran matematika yaitu (Efendi *et al.*, 2021):

- a) Memahami konsep matematika, mendeskripsikan cara keterkaitan antar konsep matematika dan menerapkan konsep atau logaritma secara efisien, luwes, akurat, dan tepat dalam memecahkan suatu masalah,
- b) Menalar sifat dari matematika, mengembangkan suatu memanipulasi matematika dalam menyusun argumen, merumuskan bukti, atau mendeskripsikan argumen dan pernyataan matematika
- c) Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah dan menyusun model penyelesaian matematika, menyelesaikan model matematika, dan memberi solusi yang tepat, dan
- d) Mengkomunikasikan argument.

## **2.2 Sejarah Matematika**

Sejarah merupakan suatu sumber pengetahuan yang dapat memberikan informasi-informasi terkait perkembangan di masa lampau yang mendukung kemajuan hingga masa sekarang. Sejarah matematika suatu kajian terkait asal-usul penemuan matematika yang meliputi notasi dan metode matematika di masa lalu (Saraswati *et al.*, 2020). Sejarah matematika memberikan dasar yang kuat untuk memahami mengapa dan bagaimana matematika berevolusi, pemahaman konsep

matematika yang dikembangkan selama tahun-tahun penelitian dengan kerja keras (Sukarani *et al*, 2022) sehingga pentingnya belajar sejarah.

Matematika sendiri memiliki sejarah yang panjang dan banyak sesuai dengan teori-teori yang ditemukan maka sejarahnya pun berbeda sejarah matematika dapat ditelusuri dari jaman Mesopotamia dan Mesir kuno seperti yang diungkapkan (Adrian *et al*, 2020). Penemuan matematika pada jaman Mesopotamia dan Mesir Kuno, didasarkan pada banyak dokumen asli yang masih ada ditulis oleh juru tulis (Wulantina *et al*, 2019), Matematika pada jaman Mesir Kuno dapat dipelajari dari artefak yang ditemukan yang kemudian disebut sebagai Papyrus Rhind (diedit pertama kalinya pada 1877), telah memberikan gambaran bagaimana matematika di Mesir kuno telah berkembang pesat. Artefak-artefak berkaitan dengan matematika yang ditemukan berkaitan dengan daerah-daerah kerajaan seperti kerajaan Sumeria 3000 SM, Akkadia dan Babylonia rezim (2000 SM), dan kerajaan Asyur (1000 SM), Persia (abad 6-4 SM), dan Yunani (abad ke 3 - 1 SM).

Perkembangan Matematika dari zaman kuno hingga zaman pertengahan tidak ada perkembangan yang berarti dan mengalami kemandekan. Matematika adalah studi besaran, struktur, ruang, dan perubahan. Para matematikawan mencari berbagai pola, merumuskan konjektur baru, dan membangun kebenaran melalui metode deduksi yang kaku dari aksioma-aksioma dan definisi-definisi yang bersesuaian. Matematika sejak saat itu segera berkembang luas, dan terdapat interaksi bermanfaat antara matematika dan sains, menguntungkan kedua belah pihak.

Penemuan-penemuan matematika dibuat sepanjang sejarah dan berlanjut hingga kini. Banyaknya makalah dan buku yang dilibatkan di dalam basis data Mathematical Reviews sejak 1940 (tahun pertama beroperasinya MR) kini melebihi 1,9 juta, dan melebihi 75 ribu artikel ditambahkan ke

dalam basis data itu tiap tahun. Sebagian besar karya di samudera ini berisi teorema matematika baru beserta buktibuktinya(Wiriani, 2021).

Matematika merupakan suatu studi besaran, struktur, ruang dan perubahan diseluruh dunia sebagai alat penting berbagai bidang termasuk ilmu alam, teknik, kedokteran / medis, dan ilmu social seperti ekonomi dan psikologi. Matematikawan juga bergulat didalam matematika murni, atau matematika untuk perkembangan matematika itu sendiri, tanpa adanya penerapan didalam pikiran, meskipun penerapan praktis yang menjadi latar munculnya matematika murni ternyata seringkali ditemukan kemudian. Sejarah matematika ilmu matematika berkembang sesuai dengan zamannya. Sebagai contoh, pada tahun 2000 SM sampai dengan 300 M, telah muncul Ilmu Hitung, Geometri, dan Logika. Pada 300 M sampai dengan 1400 M telah berkembang teori bilangan, Geometri Analitik, Aljabar, dan Trigonometri.

Sejarah teori-teori pada matematika berbeda-beda sesuai dengan kebutuhan dan permasalahan yang ada pada zamannya sebagai contoh teorema matematika pada *Pythagoras* yaitu perkiraan 800 tahun sebelum masehi (SM), para pembuat kuil di Mesir memiliki permasalahan dalam membuat kuil sebagai tempat kegiatan keagamaan yang diharapkan memiliki segi tegak lurus yang akurat. Para pembuat kuil kemudian menggunakan tali yang memiliki perbandingan 3, 4 dan 5 untuk membangun masing-masing sisi bangunan dari sisin perbandingan angka 3, 4, dan 5 ini kemudian berkembang di berbagai peradaban yang pada akhirnya dibuktikan dan dikembangkan oleh *Pythagoras* menjadi suatu teorema *Pythagoras* yang saat ini kita kenal sebagai untuk menentukan panjang sisi-sisi segitiga siku-siku.

Sejarah awalnya konsep matematika tercipta atas dasar keperluan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari dan berkembang seiring dengan berkembangnya kebutuhan dan ilmu pengetahuan manusia masing-masing (Puspa *et al*, 2018).

## 2.3 Penerapan Sejarah Matematika

Penerapan sejarah matematika di Indonesia sendiri dalam kurikulum pendidikan matematika belum terintegrasi dengan baik sehingga menyebabkan menyebabkan peserta didik tidak mengetahui dan kurang kenal tentang sejarah matematika padahal sejarah matematika banyak konsep matematika yang dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran matematika (Fachrudin *et al*, 2018)

Penerapan sejarah matematika dalam pembelajaran yaitu salah satu alat (*history as a tool*) atau strategi yang digunakan untuk membangun pembelajaran yang bermakna dan sarat dengan nilai (Wahyu *et al*, 2016). Manfaat penerapan sejarah matematika dapat diasumsikan dalam tiga kunci diantaranya yaitu;

- 1) Sejarah matematika memberikan landasan pemahaman yang mendalam tentang evolusi konsep matematika;
- 2) memahami kenapa dan bagaimana konsep matematika dikembangkan selama bertahun-tahun dengan kerja keras;
- 3) Belajar sejarah matematika bisa meningkatkan minat dan mengembangkan sikap positif siswa terhadap matematika.

Penerapan sejarah matematika dalam pembelajaran yaitu sejarah matematika dapat memberikan kesempatan untuk membangun persepsi terkait apakah sebenarnya matematika dan memungkinkan memiliki pemahaman yang lebih baik terkait konsep dan teori matematika. Membangun pemahaman yang dimaksud yaitu pada awalnya sejarah matematika bisa mengubah persepsi dan pemahaman guru tentang matematika,

kemudian sejarah matematika akan mempengaruhi bagaimana cara guru mengajarkan matematika dan pada akhirnya akan mempengaruhi cara siswa menerima dan memahami matematika sehingga bisa digunakan sebagai efektivitas penerapan sejarah matematika bisa dinilai melalui alur proses pembelajaran.

Pengintegrasian sejarah matematika dalam pembelajaran matematika juga berarti dapat berupa memanfaatkan masalah dan solusinya yang terinspirasi dari sejarah matematika, memanfaatkan cerita dari sejarah untuk menginspirasi, memanfaatkan masalah-masalah dalam sejarah sebagai sumber soal dan lain-lain (Saraswati *et al.*, 2020).

Dalam penelitiannya (Wahyu *et al.*, 2016) sejarah matematika dapat diterapkan dalam pembelajaran sebagai motivasi siswa, dengan mengetahui sejarah matematika siswa juga mulai melakukan investigasi secara mandiri, keterampilan komunikasi siswa mengalami perbaikan, kohesi kelas mempengaruhi perluasan di mana siswa merasa antusias dalam berpartisipasi dan menciptakan landasan konseptual yang akan menjadi dasar bagi guru dalam lingkungan pengembangan profesi yang berkelanjutan.

Sejarah matematika saat ini sering kali terlewatkan untuk disampaikan sebelum proses pembelajaran matematika, sehingga siswa kurang termotivasi untuk belajar matematika dan mengubah kesan siswa bahwa matematika sulit, dapat menumbuhkan sikap antusiasme, keterampilan dan kepercayaan atas kemampuan yang ada pada diri siswa masing-masing terhadap materi matematika.

## **2.4 Pendidikan Matematika**

Pendidikan merupakan suatu kegiatan dengan tujuan untuk menumbuh kembangkan bakat pada peserta didik serta menumbuhkan potensi yang ada pada peserta didik yang

dilakukan secara sadar, terencana dan berpola tujuan pendidikan yaitu untuk menumbuhkan kembangkan bakat serta potensi tiap peserta didik yang (Efendi *et al.*, 2021). Pendidikan juga dianggap sebagai tempat terbaik untuk mempersiapkan agen-agen perubahan bangsa yang akan membawa kesejahteraan di masa mendatang. Pendidikan juga dianggap sebagai tempat terbaik untuk mempersiapkan agen-agen perubahan bangsa yang akan membawa kesejahteraan di masa mendatang dan dapat dikatakan suatu proses untuk menyiapkan manusia agar dapat bertahan hidup dalam lingkungannya (life skill) serta kebutuhan manusia untuk dapat bertahan dengan perkembangan zaman (Efendi *et al.*, 2021).

Pendidikan setiap bangsa memiliki ideologi yang berbeda-beda yaitu keyakinan, nilai, cita-cita, visi, dan metode untuk mencapai tujuan yang diinginkan yang diinginkan setiap bangsa. Ada empat domain pokok yang mesti dipahami dan menjadi acuan dalam setiap proses pendidikan di Indonesia diantaranya yaitu;

1. Agar setiap siswa mengenal dan memahami potensi dalam dirinya
2. Mengetahui karakter dan potensi daerahnya yang potensial untuk dipelihara dan dikembangkan
3. Memahami sejarah dan jati diri bangsanya untuk dijaga kehormatannya dan dimakmurkan rakyatnya
4. Guru dan siswa juga perlu memiliki wawasan regional-global meskipun sekilas mengenai apa yang tengah dan akan terjadi pada tingkat internasional. Pembelajaran matematika tradisional merupakan pendidikan awal atau pelajaran awal di Indonesia setelah terlepas dari penjajahan, matematika di letakkan sebagai pelajaran wajib.

Fungsi dan Tujuan Pendidikan Matematika yaitu kecakapan dan kemahiran matematika yang diharapkan dapat tercapai dalam belajar matematika adalah (Rahmah, 2018):

1. Menunjukkan pemahaman konsep matematika yang dipelajari, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah
2. Memiliki kemampuan mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, grafik atau diagram untuk memperjelas keadaan atau masalah
3. Menggunakan penalaran pada pola, sifat atau melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi
4. Menyusun bukti atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika
5. Menunjukkan kemampuan strategik dalam membuat (merumuskan), menafsirkan, dan menyelesaikan model matematika dalam pemecahan masalah
6. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Adrian, Q. J., Ambarwari, A., & Lubis, M. (2020). Perancangan Buku Elektronik Pada Pelajaran Matematika Bangun Ruang Sekolah Dasar Berbasis Augmented Reality. *Simetris: Jurnal Teknik Mesin, Elektro Dan Ilmu Komputer*, 11(1), 171–176
- Argaswari, D.P.A.D. (2018) 'Integrasi Sejarah Matematika untuk Meningkatkan Atensi Siswa', *Indonesian Journal of Mathematics Education*, 1(1), p. 59. doi:10.31002/ijome.v1i1.950.
- Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspective. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 63–90). The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Efendi, A. *et al.* (2021) 'Pemahaman Gen Z Terhadap Sejarah Matematika', *Jurnal Pendidikan Matematika Universitas Lampung*, 9(2), pp. 116–126. doi:10.23960/mtk/v9i2.pp116-126.
- Rahmah, N. (2018) 'Hakikat Pendidikan Matematika', *Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 1(2), pp. 1–10. doi:10.24256/jpmipa.v1i2.88.
- Saraswati, R.R. *et al.* (2020) 'Integrasi Sejarah Matematika dalam Pembelajaran Matematika pada Materi Phytagoras', *Risenologi: Jurnal Sains, Teknologi, Sosial, Pendidikan, dan Bahasa*, 5(1), pp. 9–13. doi:10.47028/j.risenologi.2020.51.59.
- Sukarani, N.M. and Bella, C. (2022) 'Sejarah Aritmatika: Manfaat Pembelajaran', 2(1), pp. 1–8.
- Kusumawati, I. B., & Fachrudin, A. D. (2019). Analisis Sikap dan Keyakinan Calon Guru di Indonesia Terhadap Pemanfaatan Sejarah Matematika dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Riset Pendidikan dan Inovasi*

- Pembelajaran Matematika (JRPIPM), 3(1): 36–43.  
<https://doi.org/10.26740/Jrpipm.V3n1.P36-43>Argaswari, D.P.A.D. (2018) 'Integrasi Sejarah Matematika untuk Meningkatkan Atensi Siswa', *Indonesian Journal of Mathematics Education*, 1(1), p. 59. doi:10.31002/ijome.v1i1.950.
- Wahyu, K. and Mahfudy, S. (2016) 'Sejarah Matematika: Alternatif Strategi Pembelajaran Matematika', *Beta Jurnal Tadris Matematika*, 9(1), p. 89. doi:10.20414/betajtm.v9i1.6.
- Wiriani, W.T. (2021) 'Sejarah Serta Perkembangan Matematika dalam Dunia Pendidikan', *Dunia Ilmu*, 1(2), pp. 1–7. Available at:  
<http://www.duniailmu.org/index.php/repo/article/view/42>.
- Wulantina, E., & Maskar, S. (2019b). Pengembangan Bahan Ajar Matematika Berbasis Lampungnese Etnomatematics. Development of Material Based on Lampungnese Etnomatematics, 9(9), 2.

# BAB III

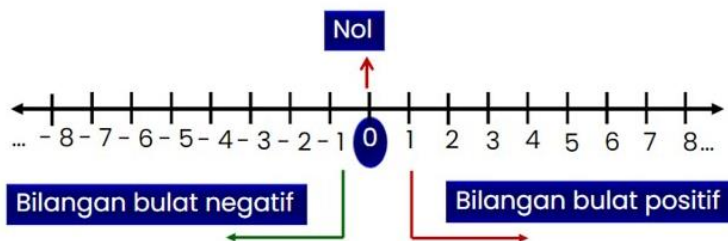
## SISTEM KOORDINAT CARTESIUS

Oleh Oktaviana Nirmala Purba

### 3.1 Letak Titik Pada Koordinat Cartesius

Dalam perhitungan matematika koordinat cartesius digunakan menentukan letak posisi titik pada bidang koordinat sumbu X dan sumbu Y. Penulisannya ditandai dengan kurung kurawal dan dipisah dengan koma, dengan contoh  $(X, Y)$ , dengan X disebut sebagai absis dan Y sebagai koordinat. Dua sumbu koordinat dapat diperoleh dengan cara membuat dua garis bilangan, lalu beri nama X dan Y, kemudian tempatkan garis X secara horizontal dan garis Y secara vertikal. Titik potong antara sumbu X dan sumbu Y disebut sebagai titik pusat atau titik asal yang dinotasikan dengan  $O(0, 0)$ .

Dalam suatu garis bilangan, setiap titik ditandai dengan jarak yang sama. Posisi bilangan positif ke arah kanan dan posisi bilangan negatif ke arah kiri. Titik acuan yang digunakan untuk menentukan jarak semua titik disebut titik pusat koordinat atau titik asal.

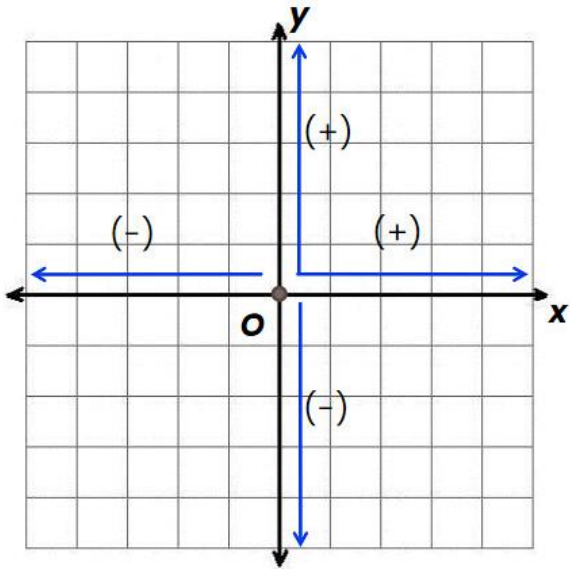


Gambar 3.1.

Koordinat cartesius tidak bisa lepas dari posisi titik dan posisi garis. Posisi titik tersebut dapat diartikan sebagai letak titik pada bidang koordinat cartesius. Hal ini dapat dilihat berdasarkan posisi titik terhadap sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  dan juga posisi titik terhadap titik pusat  $O(0,0)$  dan terhadap titik tertentu  $(a,b)$ .

Posisi titik  $(x,y)$  terhadap titik pusat  $O(0,0)$  dapat ditentukan berdasarkan nilai absis  $x$  dan nilai koordinat  $y$ . Sedangkan posisi titik  $(x,y)$  terhadap titik tertentu  $(a,b)$  dapat ditentukan berdasarkan banyak langkah dari absis titik " $x$ " ke absis titik acuan " $a$ " dan banyak langkah dari koordinat " $y$ " ke titik acuan " $b$ ". Posisi titik pada suatu bidang koordinat cartesius terbagi menjadi 4 bagian, yaitu kuadran I, kuadran II, kuadran III, kuadran IV. Terdapat beberapa aturan tanda dari setiap kuadran terdiri dari:

- Kuadran I merupakan daerah sumbu  $x$  positif dan sumbu  $y$  positif
- Kuadran II merupakan daerah sumbu  $x$  negatif dan sumbu  $y$  positif
- Kuadran III merupakan daerah sumbu  $x$  negatif dan sumbu  $y$  negatif
- Kuadran IV merupakan daerah sumbu  $x$  positif dan sumbu  $y$  negatif



**Gambar 3.2.**

Pada bidang kartesius posisi garis dapat dilihat berdasarkan posisi garis sumbu X dan sumbu Y. Posisi garis adalah letak garis pada suatu bidang cartesius. Posisi garis terhadap sumbu X merupakan garis sejajar, garis memotong, atau garis tegak lurus. Posisi garis terhadap sumbu Y merupakan garis sejajar, garis memotong, atau garis tegak lurus.

### **Contoh**

Terletak pada kuadran berapakah titik-titik dibawah ini

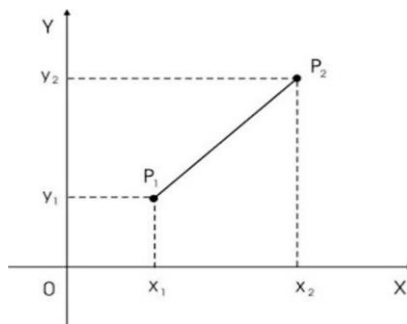
1.  $(2,3)$
2.  $(3,3)$
3.  $(-4,7)$
4.  $(85,-77)$
5.  $(-54,2)$

### Jawab

1. (2,3) Terletak pada kuadran I
2. (3,3) Terletak pada kuadran I
3. (-4,7) Terletak pada kuadran II
4. (85,-77) Terletak pada kuadran IV
5. (-54,2) Terletak pada kuadran III

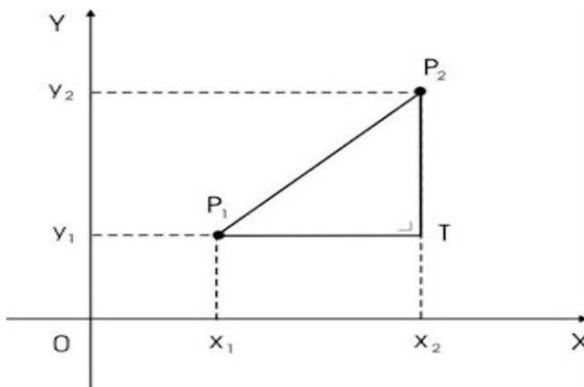
### 3.2 Jarak Dua Titik Pada Bidang Koordinat Cartesius

Dalam menentukan jarak antara dua titik bidang cartesius adalah dengan menggunakan teorema Pythagoras. Teorema Pythagoras dapat menyatakan bahwa dalam suatu segitiga siku-siku, kuadrat dari sisi miringnya sama dengan jumlah kuadrat dari sisi-sisi yang saling tegak lurus. Pada koordinat cartesius, terdapat dua garis yang tegak lurus dan berpotongan yang disebut titik pangkal. Garis ini disebut sumbu dengan sumbu koordinat. Inilah yang menjadi acuan untuk menentukan letak suatu titik. Garis mendatar atau horizontal dikenal dengan sumbu X atau absis, sedangkan garis tegak atau vertikal disebut sumbu Y atau ordinat. Suatu titik pada sistem koordinat Kartesius digambarkan sebagai  $(X, Y)$ . Sebagai contoh,  $P_1(x_1, y_1)$  dan  $P_2(x_2, y_2)$  adalah dua buah titik pada bidang datar seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.3.

Selanjutnya, dari dua titik yang diketahui di atas akan ditentukan jarak keduanya dengan cara sebagai berikut



**Gambar 3.4.**

Melalui titik  $P_1$  ditarik garis sejajar sumbu  $X$  dan melalui titik  $P_2$  ditarik garis sejajar sumbu  $Y$ . Kedua garis ini berpotongan di titik  $T$  dan membentuk segitiga  $P_1TP_2$  yang berupa segitiga siku-siku.

Dari gambar di atas dapat ditentukan bahwa panjang ruas garis  $|P_1T| = |x_2 - x_1|$ , sedangkan panjang ruas garis  $|P_2T| = |y_2 - y_1|$ .

**Contoh:**

Diketahui dua buah titik  $P(2,7)$  dan  $Q(8,3)$ . Tentukanlah panjang garis  $PQ$ .

**Pembahasan:**

Diketahui:

Titik  $P(2,7)$  maka  $x_1=2$  dan  $y_1=7$ . Titik  $Q(8,3)$  maka  $x_2=8$  dan  $y_2=3$ , Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik,

maka:

$$PQ = \sqrt{(8 - 2)^2 + (3 - 7)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2}$$

$$PQ = \sqrt{36 + 16}$$

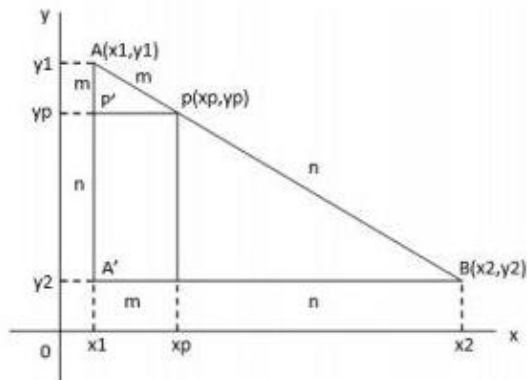
$$PQ = \sqrt{52} \text{ atau}$$

$$PQ = 2\sqrt{13}$$

Jadi, panjang garis PQ adalah  $2\sqrt{13}$  satuan panjang.

### 3.3 Menentukan Koordinat Titik pada Suatu Garis dengan Perbandingan Tertentu

Misalkan diketahui titik A dengan koordinat  $(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$  dan titik  $P(x, y)$  membagi segmen AB sedemikian  $[AP] : [PB] = m : n$ . Perhatikan gambar dibawah ini.



**Gambar 3.5**

Berdasarkan sifat kesebangunan segitiga  $A'AB$  dengan  $P'AP$  maka diperoleh perbandingan:

$$AP : AB = P'P : A'B = m : m + n$$

Sedangkan  $P'P = x_p - x_1$  dan  $A'B = x_2 - x_1$  sehingga Perbandingannya menjadi

$$\frac{x_p - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m+n}$$

$$(x_p - x_1)(m + n) = m(x_2 - x_1)$$

$$x_p m + x_p n - x_1 m - x_1 n = m x_2 - m x_1$$

$$x_p(m + n) = m x_2 - n x_1$$

$$x_p = \frac{m x_2 - n x_1}{m + n}$$

Berdasarkan sifat kesebangunan segitiga  $A'B$  dengan  $P'AP$  maka diperoleh perbandingan :

$$AP : AB = AP' : A'A' = m : m + n.$$

Sedangkan  $AP' = y - y_1$  dan  $A'A' = y_2 - y_1$  sehingga Perbandingan menjadi

$$\frac{y_p - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m+n}$$

$$(y_p - y_1)(m + n) = (y_2 - y_1)m$$

$$y_p m + y_p n - y_1 m - y_1 n = m y_2 - m y_1$$

$$y_p(m + n) = m y_2 - n y_1$$

$$y_p = \frac{m y_2 - n y_1}{m + n}$$

Sehingga koordinat titik  $p(x_p - y_p)$  yang membagi segmen  $AB$  sedemikian  $|AP| : |PB| = m : n$  adalah  $x_p = \frac{m x_2 - n x_1}{m + n}$  dan

$$y_p = \frac{m y_2 - n y_1}{m + n}$$

### Contoh :

Tentukan koordinat titik  $p(x_p - y_p)$  yang membagi segmen dari titik  $A(-6, 2)$  ke titik  $B(4, 7)$  dengan rasio  $|AP| : |PB| = 2 : 3$

### Penyelesaian

$$x_p = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{(2 \times 4) + (3 \times (-6))}{2+3} = \frac{8-18}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$y_p = \frac{my_2 - ny_1}{m+n} = \frac{(2 \times 7) + (3 \times 2)}{5} = \frac{14+6}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

sehingga koordinat titik  $p(x_p - y_p)$  adalah titik  $p(-2,4)$

### 3.4 Koordinat Cartesius pada Bidang

Agar lebih memahami dalam menentukan koordinat cartesius pada bidang dapat dilihat pada ilustrasi gambar di bawah ini.

#### Contoh:

Perhatikan peta pulau jawa berikut ini !. Jika garis berarah mendatar adalah sumbu X dan garis vertikal merupakan sumbu Y. Tentukan Kota Jember berada pada koordinat berapa? Pilih satu dari empat jawaban di bawah ini.

- a. (3, C)
- b. (5, B)
- c. (9, B)
- d. (7, C)



Gambar 3.6 Peta Pulau Jawa

Dari contoh di atas sistem koordinat dapat menentukan letak/ posisi/ koordinat dari suatu wilayah. Agar lebih pahamnya, lakukanlah kegiatan berikut ini.

Misalkan kita ingin menentukan koordinat titik  $(6, -2)$ . Caranya, lakukanlah langkah-langkah berikut ini.

1. Gambarlah dua garis yang saling tegak lurus. Garis pertama mendatar (horizontal) beri nama sumbu X dan garis kedua tegak (vertikal), beri nama sumbu Y.
2. Beri nama titik 0 pada titik potong dua sumbu tersebut atau sering juga disebut titik asal/ awal/ pusat  $(0,0)$ .
3. Dari titik 0 ke kanan atau ke atas disebut arah positif, maka tulis bilangan real positif 1,2,3, ... dengan jarak yang sama. Dari titik 0 ke kiri atau ke bawah disebut arah negatif, maka tulis pula bilangan real negatif ...,  $-1, -2, -3$  dengan jarak yang sama juga.
4. Buatlah garis putus-putus vertikal yang melalui bilangan real positif  $(6)$  pada sumbu X dan garis putus-putus horizontal yang melalui bilangan real negatif  $(-2)$  pada sumbu Y. Pertemuan antara kedua garis putus-putus tersebut merupakan koordinat dari titik  $T(6, -2)$  tersebut.

Dari kegiatan di atas Anda telah dapat menggambarkan koordinat suatu titik di bidang (dimensi 2).

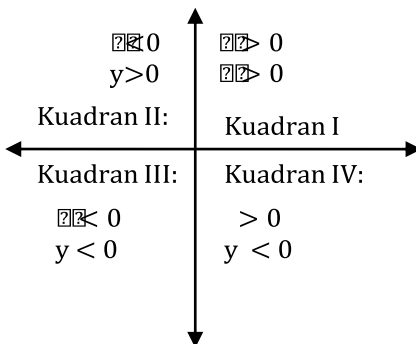
### **Penting !!!**

Misalkan suatu titik P di bidang di tulis  $P(x, y)$ . Bilangan  $x$  pada  $P(x, y)$  disebut **absis** titik P yang menyatakan jarak titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu X. Bilangan  $y$  pada  $P(x, y)$  disebut **ordinat** titik P yang menyatakan jarak titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu Y. Koordinat-koordinat titik P adalah pasangan bilangan terurut  $(x,y)$ .

Sumbu-sumbu datar dan tegak membagi bidang datar menjadi 4 bagian/daerah yang masing-masing disebut kuadran.

Sebuah titik  $P(x, y)$  terletak pada:

- kuadran I : jika absis  $x > 0$ , dan ordinat  $y > 0$ , atau  $\{T(x, y) | x > 0, y > 0\}$ .
- kuadran II : Jika absis  $x < 0$ , dan ordinat  $y > 0$ , atau  $\{T(x, y) | x < 0, y > 0\}$
- kuadran III : Jika absis  $x < 0$ , dan ordinat  $y < 0$ , atau  $\{T(x, y) | x < 0, y < 0\}$
- kuadran IV : Jika absis  $x > 0$ , dan ordinat  $y < 0$ , atau  $\{T(x, y) | x > 0, y < 0\}$ .



Perhatikan masalah 1.1 di bawah ini, jika memungkinkan berikan penyelesaian yang berbeda terhadap masalah tersebut.

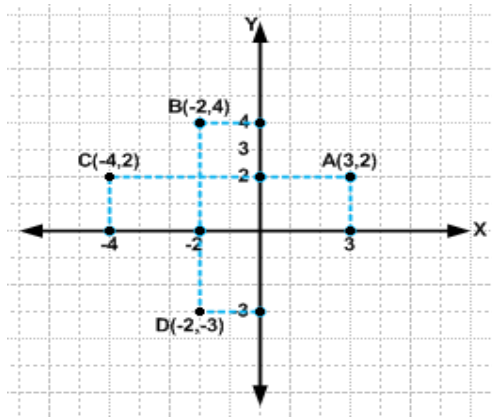
### Contoh:

Gambarlah sepasang sumbu koordinat dan gambarlah titik-titik dengan koordinat  $P(3, 2)$ ,  $Q(-2, 4)$ ,  $R(-4, 2)$ , dan  $S(-2, -3)$ , serta tuliskan koordinat-koordinatnya di samping titik-titik tersebut.

### Penyelesaian

Coba Anda perhatikan dan pahami, serta adakah anda punya temuan lain terhadap masalah tersebut? Jika ada tuliskan dalam lembar kegiatan kelompok anda. Sesuai dengan

kegiatan 1.1 kita dapat menyelesaikan masalah 1.1 tersebut dengan mengikuti langkah-langkah pada kegiatan 1.1, sehingga diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 2.7

### 3.5 Koordinat Cartesius pada Ruang

Menggambar koordinat suatu titik pada ruang berbeda ketika menggambar pada bidang. Langkah-langkah dalam menggambar koordinat suatu titik pada ruang jika diketahui  $R(12, 4, 6)$  sebagai berikut.

1. Gambarlah tiga buah garis yang saling tegak lurus. Garis pertama dibuat mendatar (horizontal) dan beri nama **sumbu Y**. Garis kedua dibuat tegak (vertikal) dan beri nama **sumbu Z**. Sedangkan garis ketiga dibuat miring memotong kedua sumbu Y dan sumbu Z dan diberi nama **sumbu X**.
2. Beri nama titik  $O$  pada perpotongan ke tiga sumbu tersebut. Titik  $O$  ini sering disebut dengan titik asal/ awal/ pusat  $(0,0,0)$ .
3. Dari titik  $O$  pada sumbu X yang mengarah miring ke Anda, pada sumbu Y ke kanan, dan pada sumbu Z ke atas disebut arah positif, maka tulis bilangan real positif 1, 2,

- 3, ... dengan jarak yang sama. Dari titik 0 pada sumbu X yang miring berlawanan arah dengan Anda, pada sumbu Z ke bawah, dan pada sumbu Y ke kiri disebut arah negatif, maka tulis pulabilangan real negatif 0, -1, -2, -3 ..., dengan jarak yang sama juga. (Bolehkah satuan jarak bilangan antara sumbu berbeda? Jawabannya boleh. Kenapa?)
4. Letakkan pena Anda pada bilangan 12 di sumbu X, lalu jalankan pena tersebut ke kanan sejajar dengan sumbu Y sejauh 4 satuan. Selanjutnya jalankan pena Anda tersebut ke atas sejauh 12 satuan.
  5. Dari langkah 4 tersebut maka titik terakhir pada pena Anda tersebut adalah merupakan tempat atau posisi dari titik R(12, 4, 6).

### Penting !!!

Misalkan sebuah titik di ruang dinyatakan dengan titik  $(x, y, z)$ . Bilangan  $x$  pada  $(x, y, z)$  disebut **absis** titik  $(x, y, z)$  yang menyatakan jarak titik  $T(x, y, z)$  ke bidang YOZ. Bilangan  $y$  pada  $(x, y, z)$  disebut **ordinat** titik  $(x, y, z)$  yang menyatakan jarak titik  $T(x, y, z)$  ke bidang XOZ. Bilangan  $z$  pada  $(x, y, z)$  disebut **aplikat** titik  $(x, y, z)$  yang menyatakan jarak titik  $T(x, y, z)$  ke bidang XOY. Ketiga sumbu X, sumbu Y, dan sumbu Z membagi ruang atas tiga bidang koordinat, yaitu bidang XOY yang dibentuk oleh perpotongan sumbu X dengan sumbu Y, bidang XOZ yang dibentuk oleh perpotongan sumbu X dengan sumbu Z, dan bidang YOZ yang dibentuk oleh perpotongan sumbu Y dengan sumbu Z. Gambar 1.4 adalah satu bentuk penggambaran ke tiga sumbu koordinat di ruang dimensi tiga.

Ketiga bidang XOY, XOZ, dan YOZ membagi ruang menjadi 8 bagian/daerah yang masing-masing disebut oktan. Suatu titik  $(x, y, z)$  di ruang dimensi tiga dikatakan terletak pada:

- **Oktan I** : jika absis  $x > 0$ , ordinat  $y > 0$ , dan aplikat  $z > 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$
- **Oktan II** : jika absis  $x < 0$ , ordinat  $y > 0$ , dan aplikat  $z > 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x < 0, y > 0, z > 0\}$
- **Oktan III** : jika absis  $x < 0$ , ordinat  $y < 0$ , dan aplikat  $z > 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x < 0, y < 0, z > 0\}$ .
- **Oktan IV** : jika absis  $x > 0$ , ordinat  $y < 0$ , dan aplikat  $z > 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x > 0, y < 0, z > 0\}$
- **Oktan V** : jika absis  $x > 0$ , ordinat  $y > 0$ , dan aplikat  $z < 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x > 0, y > 0, z < 0\}$ .
- **Oktan VI** : jika absis  $x < 0$ , ordinat  $y > 0$ , dan aplikat  $z < 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x < 0, y > 0, z < 0\}$
- **Oktan VII** : jika absis  $x < 0$ , ordinat  $y < 0$ , dan aplikat  $z < 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x < 0, y < 0, z < 0\}$
- **Oktan VIII** : jika absis  $x > 0$ , ordinat  $y < 0$ , dan aplikat  $z < 0$  atau  $\{T(x, y, z) | x > 0, y < 0, z < 0\}$ .

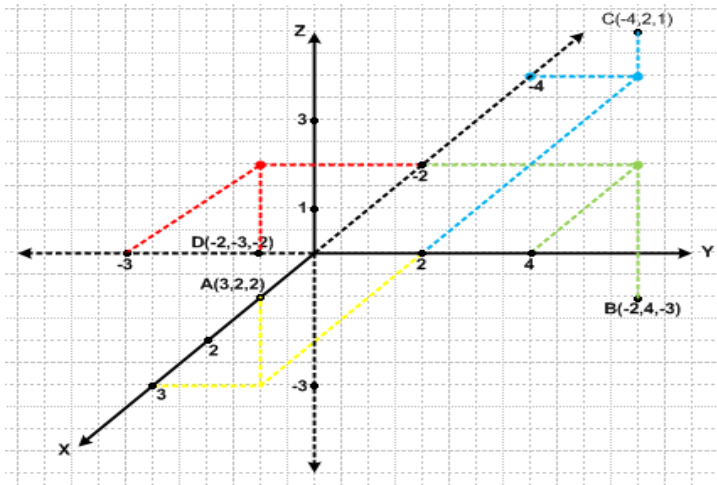
### Contoh:

Gambarlah sumbu-sumbu koordinat dan gambarlah titik-titik dengan koordinat  $A(3, 2, 2)$ ,  $B(-2, 4, -3)$ ,  $C(-4, 2, 1)$ , dan  $D(-2, -3, -2)$ , serta tuliskan koordinat-koordinatnya di samping titik-titik tersebut.

### Penyelesaian

Diskusikan dengan teman kelompok anda hasil temuan di bawah ini. Coba anda perhatikan dan pahami, serta adakah anda punya temuan lain terhadap masalah tersebut? Jika ada tuliskan dalam lembar kegiatan kelompok anda.

Sesuai dengan kegiatan 1.2 kita dapat menyelesaikan masalah 1.2 tersebut dengan mengikuti langkah-langkah pada kegiatan 1.2, sehingga diperoleh gambar sebagai berikut.

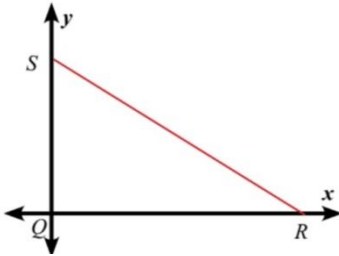


**Gambar 2.9**

### **Latihan**

1. Gambarlah titik  $A(1, -2)$ ,  $B(-3, 6)$ ,  $C(2, 8)$ , dan  $D(-1, -5)$  pada koordinat Kartesius:
  - a. Tentukan titik-titik yang berada pada kuadran I, II, III, dan IV.
  - b. Tentukan jarak setiap titik dengan sumbu X
  - c. Tentukan jarak setiap titik dengan sumbu Y
2. Gambarlah titik  $A(-4, 2)$ ,  $B(-4, 9)$ ,  $C(2, 2)$ , dan  $D(3, 9)$ , pada koordinat Kartesius
  - a. Tentukan jarak setiap titik dengan sumbu X
  - b. Tentukan jarak setiap titik dengan sumbu Y
  - c. Tentukan jarak antara titik A dengan titik B
  - d. Tentukan jarak antara titik C dengan titik D
3. Sebuah trapesium sama kaki ABCD terletak pada diagram Cartesius. Jika koordinat titik A  $(-3, -2)$ , B  $(3, -2)$ , dan C  $(1, 2)$  maka koordinat titik D adalah ....

4. Segitiga siku-siku SRQ digambar pada bidang koordinat sebagai berikut:



Jika panjang QR adalah 7 satuan dan panjang QS adalah 5 satuan, maka titik-titik koordinat Q, R, dan S secara berurutan adalah?

5. Pada gambar koordinat kartesius, dapat dilihat koordinat titik-titik sebagai berikut:

$$A = (-5, 2)$$

$$B = (5, 2)$$

$$C = (5, 8)$$

$$D = (-5, 8)$$

Jika titik A, B, C, dan D dihubungkan, akan terbentuk sebuah bangun persegi panjang. Berapa luas persegi panjang?

## DAFTAR PUSTAKA

Sukirman. 2014. *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. In: Sistem Koordinat Kartesian Tegak Lurus dan Persamaan Garis Lurus. Universitas Terbuka, Jakarta.

# BAB IV

## SISTEM BILANGAN

Oleh Richard A.M. Napitupulu

### 4.1 Pendahuluan

Saat mempelajari matematika pada umumnya bilangan yang kita gunakan adalah bilangan riil yang terbagi atas bilangan rasional dan irrasional. Pada bab ini akan dibahas sistem bilangan kompleks.

### 4.2 Notasi Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks dinotasikan dengan:

$Z = (x, y)$  artinya  $Z = x + y i$

dimana :

$x$  = bagian riil dari  $Z$

$y$  = bagian imajiner dari  $Z$

$i$  = bilangan imajiner =  $\sqrt{-1}$

Catatan :

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

### 4.3 Konjugate Bilangan Kompleks

Jika diketahui bilangan kompleks  $Z = x + y i$  maka konjugate (sekawan) bilangan tersebut adalah  $\bar{Z} = x - y i$

Contoh :

$$Z = 8 - 2i \text{ konjugatunya } \bar{Z} = 8 + 2i$$

$$Z = 4i - 5 \text{ konjugatunya } \bar{Z} = -4i - 5$$

dimana :

$$Z \cdot \bar{Z} = (x + yi)(x - yi)$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2$$

$$Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$$

Jadi perkalian bilangan kompleks dengan konjugatunya atau kelipatan konjugatunya menghasilkan bilangan riil.

Contoh :

$$(8 - 2i)(8 + 2i) = 8^2 + 2^2 = 68$$

$$(4i - 5)(-4i - 5) = 4^2 + (-5)^2 = 41$$

#### 4.4 Operasi Bilangan Kompleks

Misal diketahui bilangan kompleks  $Z_1 = x_1 + y_1i$  dan  $Z_2 = x_2 + y_2i$  maka operasi pada bilangan kompleks tersebut dinyatakan seperti di bawah ini:

$$1. Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)$$

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$2. Z_1 - Z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i)$$

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$3. k \cdot Z_1 = k(x_1 + y_1i)$$

$$k \cdot Z_1 = k \cdot x_1 + k \cdot y_1i$$

$$4. Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2i + y_1 \cdot x_2i + y_1 \cdot y_2i^2$$

$$5. \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i}$$

Kalikan dengan konjugate

**Contoh 01 :**

Jika  $Z_1 = 3i - 2$ ,  $Z_2 = 5 - i$  dan  $Z_3 = 1 + i$  tentukanlah hasil dari

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} \cdot$$

**Penyelesaian :**

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = \frac{3(5-i) - 2(3i-2)}{1+i}$$

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = \frac{15 - 3i - 6i + 4}{1+i}$$

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = \frac{19 - 9i}{1+i}$$

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = \frac{19 - 9i}{1+i} \cdot \left( \frac{1-i}{1-i} \right)$$

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = \frac{19 - 19i - 9i + 9i^2}{1+1}$$

$$\frac{3Z_2 - 2Z_1}{Z_3} = 5 - 14i$$

**Contoh 02 :**

Diketahui  $Z_1 = 2 - i$  ,  $Z_2 = 3 - i$  dan  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ . Jika  $E = I.Z$  tentukanlah E untuk  $I = 10 - 4i$ .

**Penyelesaian :**

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3-i}$$

$$Z = \frac{(3-i)(2-i)}{5-2i}$$

Maka :

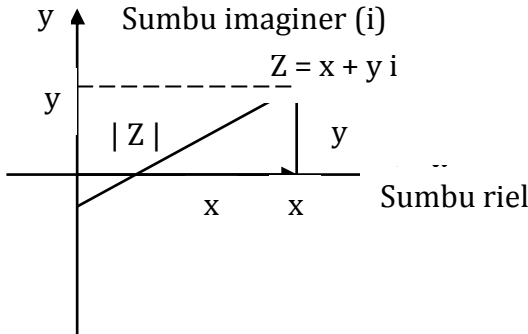
$$E = I.Z$$

$$E = (10 - 4i) \frac{(3-i)(2-i)}{5-2i}$$

$$E = 10 - 10i$$

## 4.5 Modulus (Nilai Absolut)

Modulus bilangan kompleks  $Z = x + yi$  merupakan panjang vektor posisi dari  $Z$ . Perhatikan diagram Argand di bawah ini !



Modulus dari  $Z$  adalah :

$$| Z | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### Sifat-sifat Modulus :

1.  $| Z_1 + Z_2 | = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$
2.  $| Z_1 - Z_2 | = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
3.  $| c \cdot Z_1 | = | c | \cdot | Z_1 |$
4.  $| Z_1 \cdot Z_2 | = | Z_1 | \cdot | Z_2 |$
5.  $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{| Z_1 |}{| Z_2 |}$

### Contoh 01 :

Diketahui  $Z_1 = 3 - 4i$  dan  $Z_2 = 2\sqrt{2} + i$  tentukanlah modulus dari  $Z_1 \cdot Z_2$ .

### Penyelesaian :

$$| Z_1 \cdot Z_2 | = | Z_1 | \cdot | Z_2 |$$

$$| Z_1 \cdot Z_2 | = | Z_1 | \cdot | Z_2 |$$

$$| Z_1 \cdot Z_2 | = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}$$

$$|Z_1 \cdot Z_2| = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9}$$

$$|Z_1 \cdot Z_2| = 15$$

### Contoh 02 :

Hitunglah nilai dari :  $\left| \frac{5 + 12i}{6 - 8i} \right|$

### Penyelesaian :

$$\left| \frac{5 + 12i}{6 - 8i} \right| = \frac{|5 + 12i|}{|6 - 8i|}$$

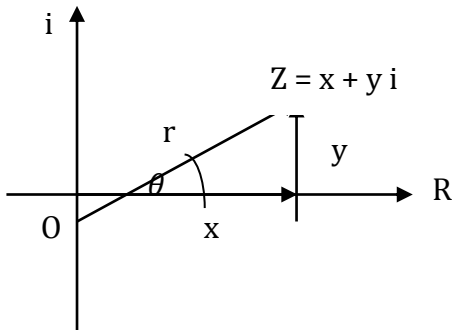
$$\left| \frac{5 + 12i}{6 - 8i} \right| = \frac{\sqrt{5^2 + 12^2}}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$\left| \frac{5 + 12i}{6 - 8i} \right| = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}}$$

$$\left| \frac{5 + 12i}{6 - 8i} \right| = 1,3$$

## 4.6 Bentuk Polar (Kutub) Bilangan Kompleks

Perhatikan diagram Argand berikut ini !



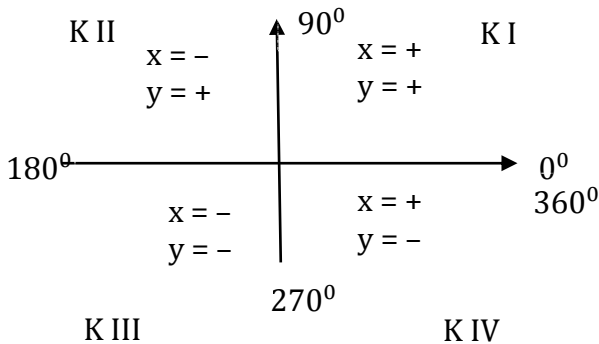
Misalkan panjang vektor  $OZ = r$  maka :

$$* \sin \theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin \theta$$

$$* \cos \theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \theta$$

$$* \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$\theta$  disebut argumen dari Z. Untuk menentukan nilai  $\theta$ , tanda di kuadran harus diperhatikan.



Jadi bentuk polar dari  $Z = x + y i$  adalah :

$$Z = r \cos \theta + r \sin \theta i$$

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

### Contoh 01 :

Tentukan bentuk polar dari :

A.  $Z = 4 + 4 i$

B.  $Z = 2 - 2 \sqrt{3} i$

### Penyelesaian :

A.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$r = 4 \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{4}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1$$

$$\theta = 45^0$$

jadi bentuk polarnya adalah :

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 \sqrt{2} (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

$$\text{B. } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2}$$

$$r = 4$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 300^0$$

jadi bentuk polarnya adalah :

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 (\cos 300^0 + i \sin 300^0)$$

### Contoh 02 :

Tentukan bilangan kompleks yang dinyatakan oleh bentuk polar berikut ini :

$$\text{A. } Z = 8 (\cos 60^0 + i \sin 60^0)$$

$$\text{B. } Z = \sqrt{2} (\cos 135^0 + i \sin 135^0)$$

### Penyelesaian :

$$\text{A. } Z = 8 (\cos 60^0 + i \sin 60^0)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 8 \cos 60^0$$

$$x = 4.$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 8 \sin 60^0$$

$$y = 4\sqrt{3}.$$

jadi bilangan kompleksnya adalah :

$$Z = x + yi$$

$$Z = 4 + 4\sqrt{3}i$$

$$B. Z = \sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$x = -1$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = \sqrt{2} \sin 135^\circ$$

$$y = 1.$$

jadi bilangan kompleksnya adalah :

$$Z = x + yi$$

$$Z = -1 + i$$

## 4.7 Bentuk Eksponensial Bilangan Kompleks

Telah dipelajari bahwa bentuk  $Z = x + yi$  dapat diubah menjadi  $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , dengan menggunakan deret pangkat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

maka :

$$Z = r \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$$

$$Z = r \left( 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right)$$

$$Z = r \left( 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \right)$$

Sehingga :

$$Z = r e^{i\theta}$$

Bentuk ini disebut bentuk eksponensial dari bilangan kompleks.

### Contoh :

Tentukan bentuk eksponensial dari bilangan kompleks di bawah ini :

A.  $Z = 2 + 2i$

B.  $Z = 8 + 8\sqrt{3}i$

### Penyelesaian :

A.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{2^2 + (2)^2}$$

$$r = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

jadi  $Z = r e^{i\theta} = 2\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}i}$

B.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{8^2 + (-8\sqrt{3})^2}$$

$$r = 16$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-8\sqrt{3}}{8}$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = 300^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{jadi } Z = r e^{i\theta} = 16 e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

## 4.8 Pangkat Bilangan Kompleks

Dengan menggunakan pengertian pangkat  $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$  sebanyak  $n$  kali, akan ditentukan rumus untuk perpangkatan dari bilangan kompleks. Misalkan diketahui :

$$Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$Z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \text{ maka:}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Jika  $Z_1 = Z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  didapat:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r \cdot r (\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta))$$

$$Z^2 = r^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

Sehingga:

$$Z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Rumus di atas dinamakan sebagai rumus “**De Moivre**” .

Dengan langkah yang sama didapat:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

### Contoh 01 :

Jika  $Z_1 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ ,  $Z_2 = 3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$  dan  $Z_3 = 6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ , tentukanlah nilai dari  $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$ .

### Penyelesaian :

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \{ \cos(20^\circ + 10^\circ + 60^\circ) + i \sin(20^\circ + 10^\circ + 60^\circ) \}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 36 \{ \cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ) \}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 36\{0 + i\}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 36 i$$

### Contoh 02 :

Diketahui  $Z_1 = 16(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$ ,  $Z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$  dan  $Z_3 = 6(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ)$ , tentukanlah nilai dari  $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$ .

### Penyelesaian :

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = \frac{16 \cdot 3}{6} \{\cos(35^\circ + 50^\circ - 55^\circ) + i \sin(35^\circ + 50^\circ - 55^\circ)\}$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = 8 \{\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ)\}$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = 8 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{3} + i \frac{1}{2} \right\}$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = 4\sqrt{3} + 4i$$

### Contoh 03 :

Hitunglah nilai dari  $(1 + \sqrt{3}i)^6$

### Penyelesaian :

$$A. r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$r = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}
Z^n &= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\
Z^6 &= 2^6 (\cos 6 \cdot 60^\circ + i \sin 6 \cdot 60^\circ) \\
Z^6 &= 64 (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) \\
Z^6 &= 64 (0 + i \cdot 1) \\
Z^6 &= 64 i
\end{aligned}$$

## 4.9 Akar Bilangan Kompleks

Dari rumus perpangkatan bilangan kompleks  $Z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  dan mengingat periode fungsi sinus dan cosinus adalah  $2\pi$  maka :

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)$$

Dalam penentuan akar bilangan kompleks dikenal akar utama yaitu akar yang paling dekat dengan sumbu x positif.

### Contoh 01 :

Tentukanlah akar pangkat tiga dan akar utama dari bilangan kompleks  $Z = 8 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

### Penyelesaian :

$$Z = 8 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)$$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{120^\circ + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{120^\circ + 2\pi k}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{Z} = 2 (\cos (40^\circ + 120^\circ k) + i \sin (40^\circ + 120^\circ k))$$

$$Z_1 = 2 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ),$$

$$Z_2 = 2 (\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ),$$

$$Z_3 = 2 (\cos 280^\circ + i \sin 280^\circ).$$

Akar utamanya adalah:

$$Z_1 = 2 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ).$$

**Contoh 02 :**

Tentukan semua nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $x^3 - 1 = 0$ .

**Penyelesaian :**

$$x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$

misal  $Z = 1$ , berarti  $x = 1$  dan  $y = 0$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{1^2 + (0)^2}$$

$$r = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0}{1}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 0$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)$$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{0^\circ + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0^\circ + 2\pi k}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{Z} = 1 (\cos (0^\circ + 120^\circ k) + i \sin (0^\circ + 120^\circ k))$$

$$x_1 = 1(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1,$$

$$x_2 = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} i$$

$$x_3 = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} i.$$

## **DAFTAR PUSTAKA**

K A Stroud. 1987. Engineering Mathematics. Pp 1 – 71).

# BAB V

## FUNGSI

Oleh Wilminche M. D. E. L. Kelen

### 5.1 Pendahuluan

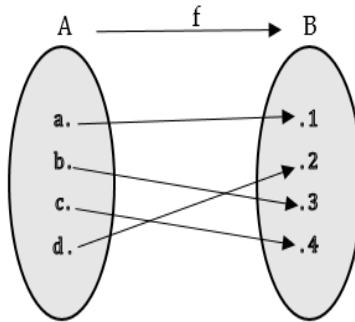
Dalam matematika, konsep fungsi merupakan sebuah konsep yang sangat penting. Konsep fungsi digunakan oleh para matematikawan dan para ahli bidang lain untuk mengetahui apakah sebuah struktur identik atau sama dengan sebuah struktur yang lain. Dalam pengembangannya, hampir semua cabang matematika menggunakan konsep fungsi. Fungsi yang banyak digunakan dalam kehidupan adalah fungsi linear dan fungsi kuadrat. Konsep fungsi linear dan fungsi kuadrat dapat digunakan untuk mempermudah menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari.

### 5.2 Pengertian Fungsi

Definisi fungsi dapat ditinjau dari 2 hal berikut.

1. Fungsi sebagai pemetaan

*Sebuah fungsi  $f$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah sebuah relasi yang memasangkan setiap elemen dari himpunan  $A$  secara tunggal dengan elemen dari himpunan  $B$ . Apabila  $f$  memetakan  $x \in A$  ke suatu  $y \in B$ , dikatakan bahwa  $y$  merupakan peta dari  $x$  oleh  $f$  di mana peta ini kemudian dinotasikan dengan  $f(x)$  dan biasa ditulis dengan  $f: x \rightarrow f(x)$ .  $x$  disebut sebagai prapeta dari  $f(x)$ .*



**Gambar 5.1**

2. *Fungsi sebagai pasangan terurut dua bilangan real  $x$  dan  $y$  adalah himpunan  $(x, y)$  di mana  $x$  paling banyak muncul satu kali dalam setiap pemetaan.*

Syarat keanggotaan himpunan fungsi  $f$  biasanya ditentukan oleh pemetaan  $x$  ke  $y$  dan umumnya dinyatakan dengan dengan suatu aturan  $y = f(x)$ .

Domain :  $D_f = \{x | (x, y) \in f\}$

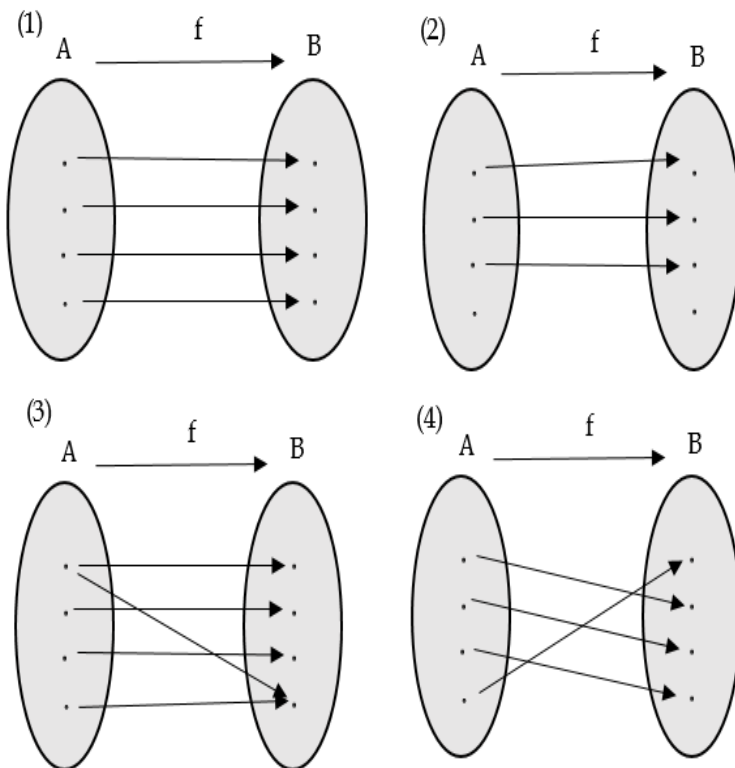
Range :  $R_f = \{y | (x, y) \in f\}$

Fungsi :  $f = \{(x, y) | (x, y_1) \text{ dan } (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2\}$

Catatan: kedua definisi di atas mengandung arti yang sama. Jika diketahui suatu fungsi dengan bentuk  $y = f(x)$ , maka fungsi tersebut dapat dipandang sebagai pemetaan atau himpunan pasangan terurut.

Jadi, fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah suatu relasi sedemikian sehingga setiap anggota himpunan  $A$  dipasangkan dengan tepat satu anggota

Perhatikan beberapa contoh relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  yang disajikan dalam bentuk diagram panah berikut.

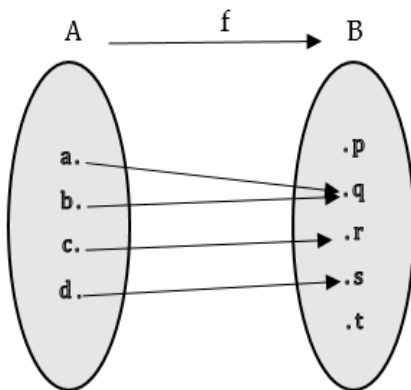


**Gambar 5.2.**

Dari keempat relasi di atas yang merupakan fungsi adalah relasi (1) dan (4), sedangkan relasi (2) bukan merupakan fungsi sebab tidak semua anggota himpunan  $A$  mempunyai pasangan di  $B$ . Demikian pula relasi (3), bukan merupakan fungsi sebab ada anggota  $A$  yang mempunyai dua pasangan (tidak tepat satu) anggota  $B$ .

### 5.2.1 Domain, Kodomain dan Range suatu fungsi

Pada suatu fungsi  $f: A \rightarrow B$ ,  $A$  disebut domain  $D$ ,  $B$  disebut kodomain, dan himpunan anggota  $B$  yang mempunyai pasangan di  $A$  disebut *range*  $R$  (daerah hasil)



Gambar 5.3.

Domain  $D$  :  $D_f = A = \{a, b, c, d\}$

Kodomain :  $B = \{p, q, r, s, t\}$

Range  $R$  :  $R_f = \{q, r, s\} \subseteq B$

Fungsi  $f$  bila dituliskan dalam pasangan terurut adalah:

$f = \{(a, q), (b, q), (c, r), (d, s)\}$

### 5.3 Sifat-sifat Fungsi

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan  $A$  dan  $B$  direlasikan dalam suatu himpunan, maka dikenal tiga sifat yakni sebagai berikut:

#### 5.3.1 Fungsi Injektif

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut **fungsi satu-satu** atau **fungsi injektif** jika dan hanya jika untuk sembarang  $a_1$  dan  $a_2 \in A$  dengan  $a_1 \neq a_2$  berlaku  $f(a_1)$  tidak sama dengan  $f(a_2)$ . Dengan

kata lain, jika  $a_1 = a_2$  maka  $f(a_1)$  sama dengan  $f(a_2)$ .

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$f: A \rightarrow B = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$$

### 5.3.2 Fungsi Surjektif

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut **fungsi kepada**, **fungsi onto**, atau **fungsi surjektif** jika dan hanya jika untuk sembarang  $b$  dalam kodomain  $B$  terdapat paling tidak satu  $a$  dalam domain  $A$  sehingga berlaku  $f(a) = b$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b\}$$

$$f: A \rightarrow B = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$$

### 5.3.3 Fungsi Bijektif

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut **fungsi korespondensi satu-satu**, **fungsi into**, atau **fungsi bijektif** jika dan hanya jika untuk sembarang  $b$  dalam kodomain  $B$  terdapat tepat satu  $a$  dalam domain  $A$  sehingga  $f(a) = b$ , dan tidak ada anggota  $A$  yang tidak terpetakan dalam  $B$ . Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah sekaligus injektif dan surjektif.

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$f: A \rightarrow B = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

## 5.5 Jenis-jenis Fungsi

Jika suatu fungsi  $f$  memiliki daerah asal dan daerah kawan yang sama misalnya  $D$ , maka sering disebut fungsi  $f$  pada  $D$ . Jika

daerah asal dari fungsi tidak dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real ( $\mathbb{R}$ ). Untuk fungsi-fungsi pada  $\mathbb{R}$  kita kenal beberapa fungsi antara lain sebagai berikut.

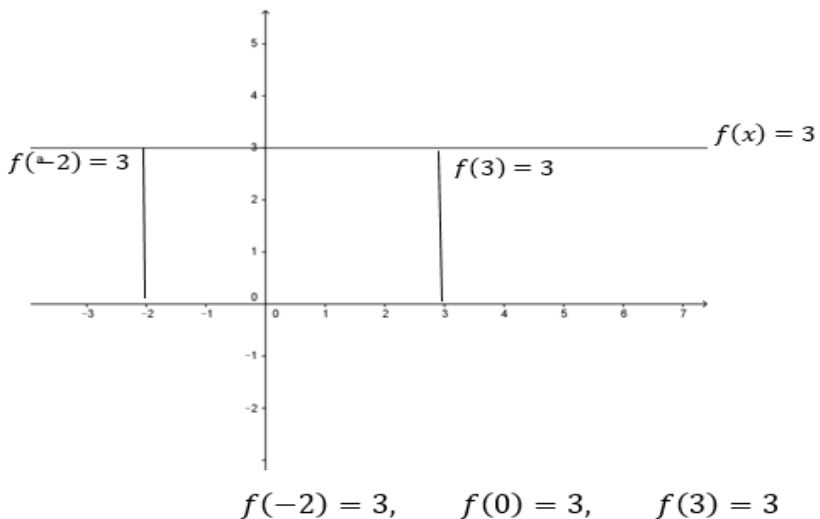
### 5.5.1 Fungsi Konstan

Definisi

$f: x \rightarrow C$  dengan  $C$  konstan disebut fungsi konstan (tetap). Fungsi  $f$  memetakan setiap bilangan real dengan  $C$ .

Contoh

$$f: x \rightarrow 3$$

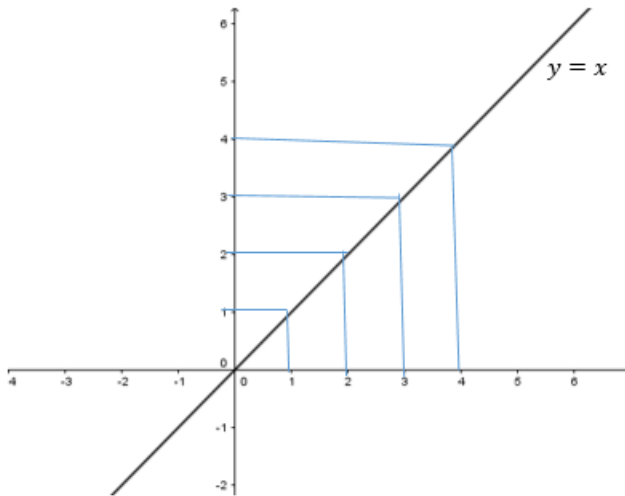


**Gambar 5.4.**

### 5.5.2 Fungsi Identitas

Definisi

Fungsi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan sebagai  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi identitas.



$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$

**Gambar 5.5.**

### 5.5.3 Fungsi Linear

#### Definisi

Fungsi pada bilangan real yang didefinisikan  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b$  konstan dengan  $a \neq 0$  disebut fungsi linear.

Grafik fungsi linear berupa garis lurus. Untuk menggambar grafik fungsi linear, dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan menggunakan tabel dan dengan menentukan titik potong sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ .

#### Contoh

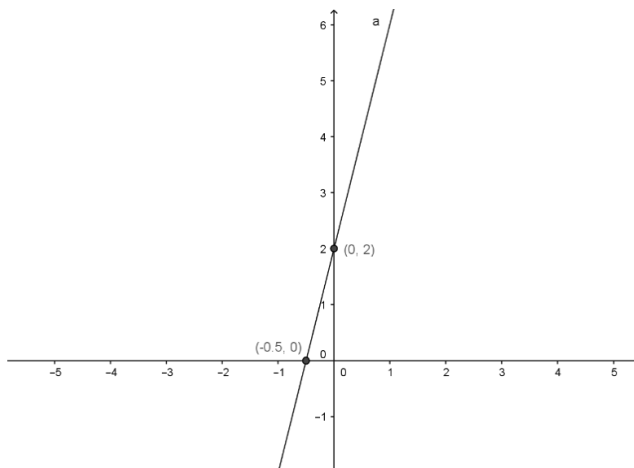
Gambarlah grafik fungsi  $y = 4x + 2$

#### Penyelesaian

Dengan membuat tabel

|              |    |    |   |   |    |
|--------------|----|----|---|---|----|
| $x$          | -2 | -1 | 0 | 1 | 2  |
| $y = 4x + 2$ | -6 | -2 | 2 | 6 | 10 |

Dengan menentukan titik potong antara sumbu  $x$  dan sumbu  $y$



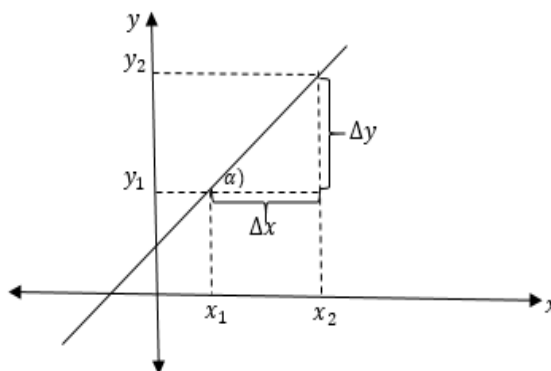
**Gambar 5.6.**

Beberapa hal penting dalam fungsi linear:

### 1) Gradien

Gradien atau koefisien arah ( $m$ ) adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kemiringan suatu garis.

Perhatikan gambar berikut ini.



**Gambar 5.7.**

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis  $y = mx + c$ , dengan  $m, c \in R$ ,  $c$  adalah konstanta, dengan  $m$  melambangkan gradien atau koefisien garis lurus. Pada gambar di atas, misalkan  $\alpha$  adalah sudut yang terbentuk antara garis horisontal (sejajar sumbu  $x$ ) dan grafik fungsi linear dengan arah putaran berlawanan arah dengan putaran jarum, maka gradien dapat pula didefinisikan sebagai

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Catatan:

- 1) jika  $m = 0$ , maka grafik sejajar dengan sumbu  $x$ , ini sering disebut dengan ungsi konstan
- 2) jika  $m > 0$ , maka grafik miring ke kanan ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ )
- 3) jika  $m < 0$ , maka grafik miring ke kiri ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ )

## 2) Menentukan Persamaan Garis yang Melalui Satu Titik dengan Gradien $m$

Misalkan garis  $y = mx + c$  melalui titik  $P(x_1, y_1)$ , setelah nilai koordinat titik  $P$  disubstitusikan ke persamaan garis tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y_1 &= mx_1 + c \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis melalui titik  $P(x_1, y_1)$  dan bergradien  $m$  adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

## 3) Menentukan Persamaan Garis Melalui Dua Titik

Persamaan garis melalui dua titik  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$  dapat dicari dengan langkah sebagai berikut:

Persamaan garis melalui titik  $A(x_1, y_1)$  dengan memisalkan gradiennya  $m$  adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1) \dots\dots\dots (1)$$

Karena garis ini juga melalui titik  $B(x_2, y_2)$  maka  $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ , sehingga diperoleh gradiennya

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \dots\dots\dots (2)$$

Persamaan (2) jika disubstitusikan ke persamaan (1) akan diperoleh

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi, persamaan garis melalui dua titik  $(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$  adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

#### 4) Menentukan Titik Potong antara Dua Garis

Misalkan dua garis  $g_1$  dan  $g_2$  saling berpotongan di titik  $P(x, y)$ , maka nilai  $x$  dan  $y$  harus memenuhi kedua persamaan garis tersebut. Titik potong dua garis dapat dicari dengan metode substitusi, eliminasi, atau bisa juga dengan cara membuat sketsa grafiknya.

#### 5) Hubungan Gradien dari dua Garis

1. Garis  $g_1$  yang bergradien  $m_1$  dikatakan sejajar dengan garis  $g_2$  yang bergradien  $m_2$  jika  $m_1 = m_2$
2. Garis  $g_1$  yang bergradien  $m_1$  dikatakan tegak lurus dengan garis  $g_2$  yang bergradien  $m_2$  jika memenuhi  $m_1 \cdot m_2 = -1$

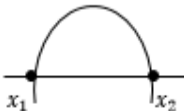
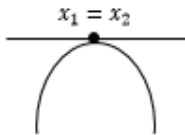
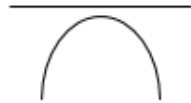
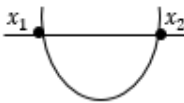
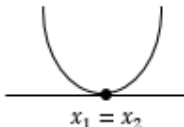
### 5.5.4 Fungsi Kuadrat

#### Definisi

Bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah  $y = ax^2 + bx + c$  dengan  $a, b, c \in R$  dan  $a \neq 0$ . Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola sehingga sering disebut fungsi parabola. Jika  $a > 0$ , parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum. Jika  $a < 0$ , parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik puncak maksimum.

Langkah-langkah dalam menggambar fungsi kuadrat  $y = ax^2 + bx + c$

- a. Tentukan pembuat nol fungsi  $\rightarrow y = 0$  atau  $f(x) = 0$   
 Pembuat nol fungsi dari persamaan kuadrat  $y = ax^2 + bx + c$  diperoleh jika  $ax^2 + bx + c = 0$  sehingga diperoleh nilai  $x$  yang memenuhi  $ax^2 + bx + c = 0$ . Nilai ini tidak lain adalah absisi titik potong dengan sumbu  $x$ , sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu  $y$  dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai  $x$  tadi pada persamaan kuadrat semula
- b. Tentukan sumbu simetri  $x = -\frac{b}{2a}$
- c. Tentukan titik puncak  $P(x, y)$  dengan  $x = -\frac{b}{2a}$  dan  $D = -\frac{D}{4a}$ , dengan nilai  $D = b^2 - 4ac$ .  
 Jika ditinjau dari nilai  $a$  dan  $D$  maka sketsa grafik parabola sebagai berikut:

|                                                                                                     |                                                                                                     |                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a < 0, D > 0$<br> | $a < 0, D = 0$<br> | $a < 0, D < 0$<br><br>Definit negatif |
| $a > 0, D > 0$<br> | $a > 0, D = 0$<br> | $a > 0, D < 0$<br><br>Definit positif |

**Gambar 5.8.**

Catatan:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  dapat dicari akar-akarnya dengan cara:

- 1) Pemfaktoran
- 2) Melengkapi bentuk kuadrat sempurna
- 3) Rumus abc:  $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh:

Gambarlah sketsa grafik fungsi  $y = x^2 - 4x + 3$

Penyelesaian:

- a) Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= 0 \\(x - 1)(x - 3) &= 0\end{aligned}$$

$x = 1$  atau  $x = 3$

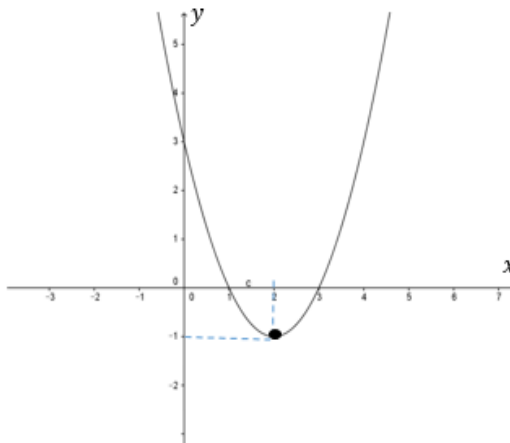
- b) Menentukan sumbu simetri  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$

- c) Menentukan titik puncak  $P(x, y)$

Karena nilai  $x$  sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai  $y$  dengan substitusi  $x = 2$  pada fungsi semula

$$\begin{aligned}y &= (2)^2 - 4(2) + 3 \\&= 4 - 8 + 3 = -1\end{aligned}$$

Jadi, puncak parabola adalah titik  $(2, -1)$  sehingga sketsa grafiknya seperti pada gambar di bawah ini



**Gambar 5.9.**

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Amir, M. Faizal dan Prasajo, B. Hari. 2016. Buku Ajar Matematika Dasar.
- Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. 2014. Buku Guru Matematika Kelas X.
- Noormandiri, B. K. dan Sucipto, Endar. 2000. Buku Pelajaran Matematika SMU Kelas 2.

# BAB VI

## TRIGONOMETRI

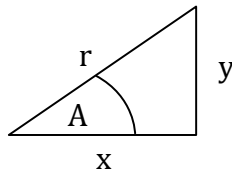
Oleh Miduk Tampubolon

### 6.1 Pendahuluan

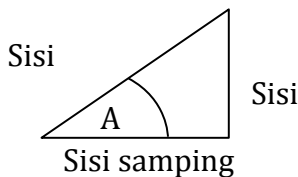
Saat mempelajari trigonometri, kita dapat mengetahui fungsi trigonometri dengan pendekatan secara geometris dengan mengandaikan  $C$  merupakan kurva lingkaran yang berpusat di titik  $O(0, 0)$  berjari-jari 1 satuan yaitu  $x^2 + y^2 = 1$ , dan menyatakan titik  $A(1, 0)$  sehingga terdapat tepat satu titik  $P(x, y)$  pada  $C$  yang memiliki panjang busur  $AP$  sebesar  $t$  satuan. Dalam bab ini kita akan mulai dengan definisi perbandingan trigonometri sebagai perbandingan antara dua sisi pada segitiga siku-siku.

### 6.2 Rumus Dasar

Perhatikan gambar!



Untuk menghapalkan rumus-rumus dasar trigonometri, sisi-sisi segitiga di atas kita beri nama seperti di bawah ini:



Rumus Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

maka :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = \sqrt{r^2 - y^2}$
- $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Rumus Trigonometri:

1. Sindemi

$$\sin A = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{y}{r}$$

2. Cosami

$$\cos A = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{x}{r}$$

3. Tandes

$$\tan A = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{y}{x}$$

Kebalikannya:

$$1. \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$2. \csc A = \frac{1}{\sin A}$$

$$3. \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

### **a) Rumus Identitas**

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

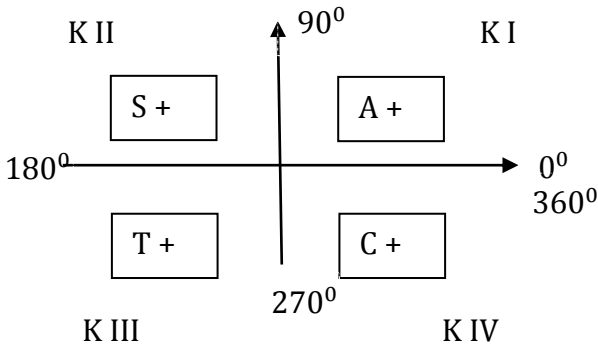
$$2. 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$3. 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$4. \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

### b) Tanda Trigonometri berdasarkan kuadran

Tanda trigonometri dapat dinyatakan seperti di bawah ini:



Pada kuadran pertama ( K I ) tanda trigonometrinya adalah:

$$\sin = +$$

$$\cos = +$$

$$\operatorname{Tg} = +$$

$$\operatorname{Cosec} = +$$

$$\operatorname{Secan} = +$$

$$\operatorname{Cotg} = +$$

Pada kuadran kedua ( K II ) tanda trigonometrinya adalah:

$$\sin = +$$

$$\cos = -$$

$$\operatorname{Tg} = -$$

$$\operatorname{Cosec} = +$$

$$\operatorname{Secan} = -$$

$$\operatorname{Cotg} = -$$

Pada kuadran ketiga ( K III ) tanda trigonometrinya adalah:

$$\sin = -$$

$$\cos = -$$

$$\text{Tg} = +$$

$$\text{Cosec} = -$$

$$\text{Secan} = -$$

$$\text{Cotg} = +$$

Pada kuadran keempat ( K IV ) tanda trigonometrinya adalah:

$$\sin = -$$

$$\cos = +$$

$$\text{Tg} = -$$

$$\text{Cosec} = -$$

$$\text{Secan} = +$$

$$\text{Cotg} = -$$

### c) Sudut Istimewa.

|     | $0^0$ | $30^0$                | $45^0$                | $60^0$                | $90^0$   |
|-----|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|
| sin | 0     | $\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1        |
| cos | 1     | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$         | 0        |
| tg  | 0     | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1                     | $\sqrt{3}$            | $\infty$ |

### d) Relasi Sudut

Hubungan atau relasi sudut dinyatakan seperti di bawah ini:

$$1. \sin (90^0 - x) = \cos x$$

$$\cos (90^0 - x) = \sin x$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} (90^0 - x) &= \operatorname{cotg} x \\ \operatorname{cosec} (90^0 - x) &= \sec x \\ \sec (90^0 - x) &= \operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cotg} (90^0 - x) &= \operatorname{tg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \sin (90^0 + x) &= \cos x \\ \cos (90^0 + x) &= -\sin x \\ \operatorname{tg} (90^0 + x) &= -\operatorname{cotg} x \\ \operatorname{cosec} (90^0 + x) &= \sec x \\ \sec (90^0 + x) &= -\operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cotg} (90^0 + x) &= -\operatorname{tg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \sin (180^0 - x) &= \sin x \\ \cos (180^0 - x) &= -\cos x \\ \operatorname{tg} (180^0 - x) &= -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec} (180^0 - x) &= \operatorname{cosec} x \\ \sec (180^0 - x) &= -\sec x \\ \operatorname{cotg} (180^0 - x) &= -\operatorname{cotg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \sin (180^0 + x) &= -\sin x \\ \cos (180^0 + x) &= -\cos x \\ \operatorname{tg} (180^0 + x) &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec} (180^0 + x) &= -\operatorname{cosec} x \\ \sec (180^0 + x) &= -\sec x \\ \operatorname{cotg} (180^0 + x) &= \operatorname{cotg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. \sin (270^0 - x) &= -\cos x \\ \cos (270^0 - x) &= -\sin x \\ \operatorname{tg} (270^0 - x) &= \operatorname{cotg} x \\ \operatorname{cosec} (270^0 - x) &= -\sec x \\ \sec (270^0 - x) &= -\operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cotg} (270^0 - x) &= \operatorname{tg} x\end{aligned}$$

$$6. \sin (270^0 + x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\cos (270^0 + x) &= \sin x \\ \operatorname{tg} (270^0 + x) &= -\operatorname{cotg} x \\ \operatorname{cosec} (270^0 + x) &= -\sec x \\ \sec (270^0 + x) &= \operatorname{cosec} x \\ \operatorname{cotg} (270^0 + x) &= -\operatorname{tg} x\end{aligned}$$

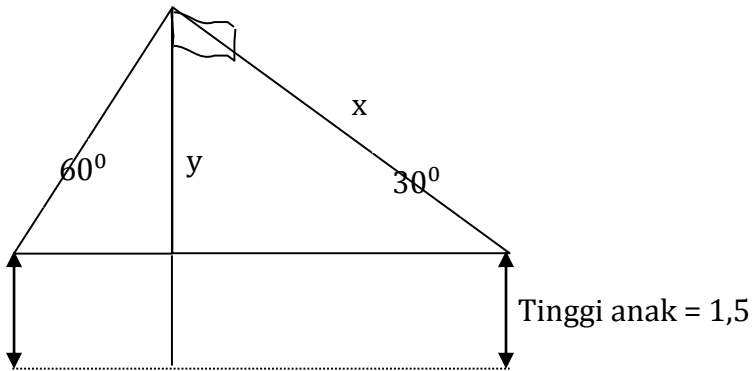
$$\begin{aligned}7. \sin (360^0 - x) &= -\sin x \\ \cos (360^0 - x) &= \cos x \\ \operatorname{tg} (360^0 - x) &= -\operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec} (360^0 - x) &= -\operatorname{cosec} x \\ \sec (360^0 - x) &= \sec x \\ \operatorname{cotg} (360^0 - x) &= -\operatorname{cotg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. \sin (360^0 + x) &= \sin x \\ \cos (360^0 + x) &= \cos x \\ \operatorname{tg} (360^0 + x) &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec} (360^0 + x) &= \operatorname{cosec} x \\ \sec (360^0 + x) &= \sec x \\ \operatorname{cotg} (360^0 + x) &= \operatorname{cotg} x\end{aligned}$$

### Contoh 01:

Dua orang anak yang tingginya 1,5 *meter* berdiri berhadapan menghadap tiang bendera yang terletak di antara mereka. Jika kedua anak berjarak  $8\sqrt{3}$  meter dan melihat puncak tiang bendera dengan sudut masing-masing  $30^\circ$  dan  $60^\circ$  terhadap arah mendatar, tentukanlah tinggi tiang bendera tersebut.

**Penyelesaian:**



$$\sin 60^\circ = \frac{x}{8\sqrt{3}}$$

$$x = 12$$

$$\sin 30^\circ = \frac{y}{12}$$

$$y = 6$$

maka tinggi tiang bendera = 7,5 m

**Contoh 02:**

Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai dari :

$$\frac{\operatorname{cosec} 210^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\sec 240^\circ}$$

**Penyelesaian:**

$$\frac{\operatorname{cosec} 210^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\sec 240^\circ}$$

$$= \frac{\sec 240^\circ}{\operatorname{cosec} (180^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{tg} (360^\circ - 60^\circ)}$$

$$= \frac{\sec (180^\circ + 60^\circ)}{-\operatorname{cosec} (30^\circ) \cdot (-\operatorname{tg} 60^\circ)}$$

$$= \frac{-\sec (60^\circ)}{(-2) \cdot (-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-2}{-2}$$

$$= -\sqrt{3}$$

### Contoh 03:

Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai dari :

$$\frac{\cos 870^0 \cdot \sin 1110^0}{\operatorname{tg} 600^0}$$

### Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 870^0 \cdot \sin 1110^0}{\operatorname{tg} 600^0} \\ &= \frac{\cos(900^0 - 30^0) \cdot \sin(1080^0 + 30^0)}{\operatorname{tg}(540^0 + 60^0)} \\ &= \frac{-\cos 30^0 \cdot \sin 30^0}{\operatorname{tg} 60^0} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

## 6.3 Jumlah dan Selisih Sudut

1.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
2.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
3.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
4.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
5.  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
6.  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$

## 6.4 Sudut Rangkap

### a) Sudut Rangkap dua

- 1)  $\sin 2x = \sin(x + x)$   
 $\sin 2x = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \cos 2x &= \cos (x + x) \\
 \cos 2x &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \\
 \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \text{Atau} \\
 \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\
 \text{Atau} \\
 \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \operatorname{Tg} 2x &= \operatorname{tg} (x + x) \\
 \operatorname{Tg} 2x &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} \\
 \operatorname{Tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}
 \end{aligned}$$

### b) Sudut Rangkap Tiga

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\
 2) \quad \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\
 3) \quad \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}
 \end{aligned}$$

#### Contoh 01:

Tentukanlah nilai dari  $\cos 285^\circ$  !

#### Penyelesaian:

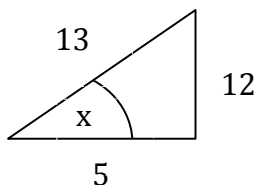
$$\begin{aligned}
 \cos 285^\circ &= \cos (360^\circ - 75^\circ) \\
 \cos 285^\circ &= \cos 75^\circ \\
 \cos 285^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) \\
 \cos 285^\circ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\
 \cos 285^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \\
 \cos 285^\circ &= \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

**Contoh 02:**

Diketahui  $\operatorname{tg} x = -2,4$  dan  $x$  terletak pada interval  $90^\circ < x < 180^\circ$ , tentukanlah nilai dari.

**Penyelesaian:**

$\operatorname{tg} x = -2,4 = -\frac{12}{5}$  terletak di kuadran II.



$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

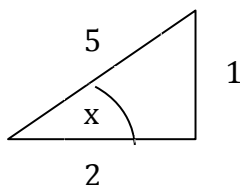
$$\sin 2x = -\frac{120}{169}$$

**Contoh 03:**

Diketahui  $\sin x = \frac{1}{5} \sqrt{5}$ , dengan  $0^\circ < x < 90^\circ$  Tentukanlah hasil dari  $\operatorname{tg} 3x$ !

**Penyelesaian:**

$$\sin x = \frac{1}{5} \sqrt{5} = \frac{1}{5}$$



$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^3 x}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3}{1 - 3 (\frac{1}{2})^3}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{11}{2}$$

## 6.5 Rumus Jumlah, Selisih dan Hasil Kali Sinus Dan Cosinus

### a) Rumus Jumlah dan Selisih

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ 2) \quad \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ 3) \quad \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ 4) \quad \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

### b) Rumus Hasil Kali

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} ( \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) ) \\ 2) \quad \cos \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} ( \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) ) \\ 3) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} ( \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) ) \\ 4) \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta &= -\frac{1}{2} ( \cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) ) \end{aligned}$$

### Contoh 01:

Tanpa menggunakan kalkulator dan tabel hitunglah nilai dari :

$$\frac{\sin 195^\circ - \sin 255^\circ}{\cos 195^\circ - \cos 255^\circ}$$

### Penyelesaian:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin 195^\circ - \sin 255^\circ}{\cos 195^\circ - \cos 255^\circ} \\ &= \frac{2 \sin \left( \frac{195^\circ + 255^\circ}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{195^\circ - 255^\circ}{2} \right)}{2 \cos \left( \frac{195^\circ + 255^\circ}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{195^\circ - 255^\circ}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin 225^\circ}{\cos 225^\circ} \\ &= \operatorname{tg} 225^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Contoh 02:**

Sederhanakanlah bentuk pembagian trigonometri di bawah ini :

$$\frac{\cos 8x + \cos 6x + \cos 4x}{\sin 8x + \sin 6x + \sin 4x}$$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 8x + \cos 6x + \cos 4x}{\sin 8x + \sin 6x + \sin 4x} \\ &= \frac{2 \cos 6x \cdot \cos 2x + \cos 6x}{2 \sin 6x \cdot \cos 2x + \sin 6x} \\ &= \frac{\cos 6x (2 \cos 2x + 1)}{\sin 6x (2 \cos 2x + 1)} \\ &= \cotg 6x \end{aligned}$$

**6.6 Fungsi  $Y = a \cos x + b \sin x + c$** **a) Mengubah Bentuk  $a \cos x + b \sin x$** 

Jika bentuk  $a \cos x + b \sin x$  diubah menjadi bentuk  $k \cos (x - \alpha)$  maka :

$$a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \alpha)$$

$$a \cos x + b \sin x = k \cos x \cdot \cos \alpha + k \sin x \cdot \sin \alpha$$

$$a = k \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$b = k \sin \alpha \dots\dots\dots (2)$$

Jika persamaan (2) dibagi dengan persamaan (1) didapat :

$$\frac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Jika persamaan (1) kuadrat ditambah dengan persamaan (2) kuadrat didapat :

$$a^2 + b^2 = k^2 \cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha$$

$$a^2 + b^2 = k^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$a^2 + b^2 = k^2 (1)$$

$$a^2 + b^2 = k^2$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**c) Persamaan  $a \cos x + b \sin x = c$**

Persamaan  $a \cos x + b \sin x = c$  dapat diselesaikan dengan cara mengubah bentuknya menjadi  $k \cos (x - \alpha) = c$ . Karena nilai maksimum dan minimum  $\cos (x - \alpha)$  berturut-turut adalah 1 dan  $-1$  maka syarat agar persamaan tersebut mempunyai penyelesaian adalah  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

**d) Nilai Maksimum dan Minimum**

Fungsi trigonometri  $Y = a \cos x + b \sin x + c$  dapat diubah menjadi  $Y = k \cos (x - \alpha) + c$ . karena nilai maksimum  $\cos (x - \alpha)$  adalah 1 maka  $Y_{\text{maks}} = k + c$ . Karena nilai minimum  $\cos (x - \alpha)$  adalah  $-1$  maka  $Y_{\text{min}} = -k + c$ .

**Contoh 01:**

Ubahlah bentuk dari trigonometri  $\sqrt{3} \cos x - \sin x$  menjadi bentuk  $k \cos (x - \alpha)$  !

**Penyelesaian:**

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 330^\circ$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$k = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}$$

$$k = 2$$

$$\text{jadi } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos (x - 330^\circ)$$

### Contoh 02:

Ubahlah bentuk trigonometri  $4 \sin 3x - 4 \cos 3x$  menjadi bentuk  $k \cos (3x - \alpha)$  !

### Penyelesaian:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{-4}$$

$$\alpha = 135^\circ$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$k = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$$

$$k = 4\sqrt{2}$$

$$\text{jadi } 4 \sin 3x - 4 \cos 3x = 4\sqrt{2} \cos (3x - 135^\circ)$$

### Contoh 03:

Tentukanlah interval dari nilai  $m$  yang memenuhi agar persamaan  $m \cos x + (m + 1) \sin x = m + 2$  dapat diselesaikan.

### Penyelesaian:

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$m^2 + (m + 1)^2 \geq (m + 2)^2$$

$$m^2 + m^2 + 2m + 1 \geq m^2 + 4m + 4$$

$$m^2 - 2m - 3 \geq 0$$

$$m \leq -1 \text{ atau } m \geq 3$$

### Contoh 04:

Jika nilai maksimum dari fungsi  $f(x) = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x + 2$

merupakan nilai minimum fungsi  $f(x) = 12 \cos 4x - 5 \sin 4x + p$   
tentukanlah nilai p.

**Penyelesaian:**

$$f(x) = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x + 2$$

$$f(x)_{\text{maks}} = \sqrt{9 + 16} + 2$$

$$f(x)_{\text{maks}} = 7$$

$$f(x) = 12 \cos 4x - 5 \sin 4x + p$$

$$f(x)_{\text{min}} = -\sqrt{144 + 25} + p$$

$$7 = -13 + p$$

$$p = 20.$$

**Contoh 04:**

Jika nilai maksimum dari fungsi  $f(x) = \frac{m}{\sqrt{3} \cos x - \sin x + 8}$  adalah 3,  
tentukanlah nilai minimum fungsi tersebut.

**Penyelesaian:**

$$f(x)_{\text{maks}} = \frac{m}{-\sqrt{3} + 1 + 8}$$

$$3 = \frac{m}{6}$$

$$m = 18$$

maka :

$$f(x)_{\text{min}} = \frac{18}{\sqrt{3} + 1 + 8}$$

$$f(x)_{\text{min}} = 1,8.$$

## 6.7 Grafik Fungsi Trigonometri

### a) Grafik Fungsi Sinus.

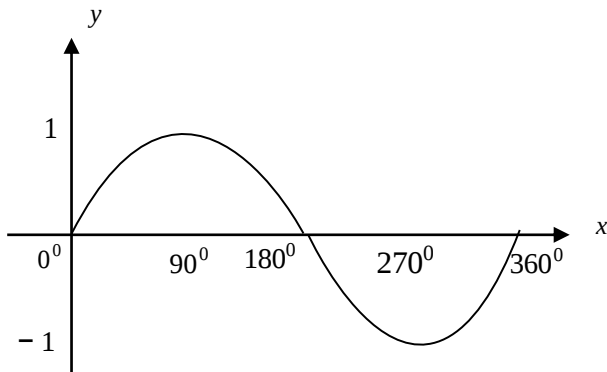
Bentuk Umum :  $y = A \sin kx$

Amplitudo =  $|A|$

Perioda =  $\frac{2\pi}{k}$

Untuk nilai  $A = 1$  dan  $k = 1$  diperoleh  $y = \sin x$  dengan

amplitudo = 1 dan perioda =  $360^\circ$ , grafiknya sebagai berikut:



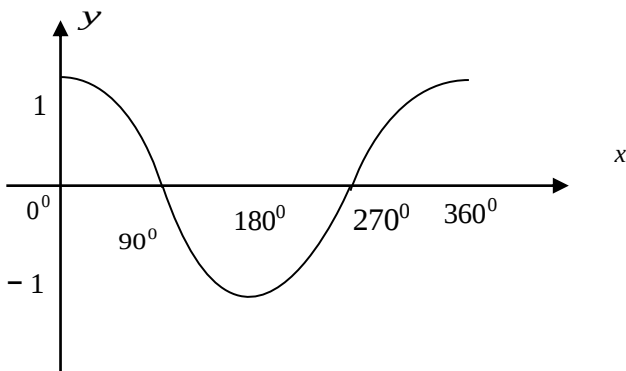
### b) Grafik Fungsi Cosinus.

Bentuk Umum :  $y = A \cos kx$

Amplitudo =  $|A|$

Perioda =  $\frac{2\pi}{k}$

Untuk nilai  $A = 1$  dan  $k = 1$  diperoleh  $y = \cos x$  dengan amplitudo = 1 dan perioda =  $360^\circ$ , grafiknya sebagai berikut

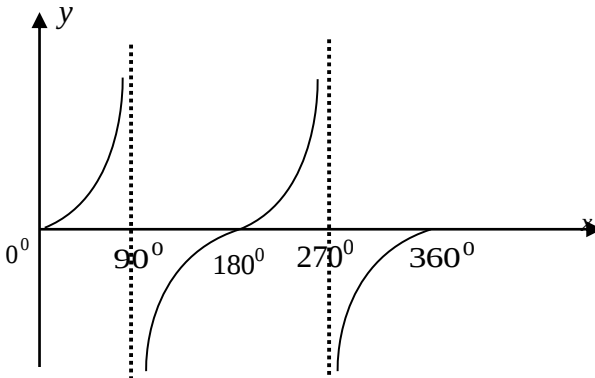


### c) Grafik Fungsi Tangen.

Bentuk Umum :  $y = A \operatorname{tg} k x$

Perioda =  $\frac{\pi}{k}$

Untuk nilai  $A = 1$  dan  $k = 1$  diperoleh  $y = \sin x$  dengan perioda =  $180^\circ$ , grafiknya sebagai berikut



## 6.8 Pergeseran Grafik Fungsi Trigonometri

### a) Pergeseran Grafik Fungsi Sinus.

Untuk  $\alpha > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \sin k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke kanan maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \sin k (x - \alpha)$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \sin k x$  digeser sejauh  $\alpha$  satuan ke kiri maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \sin k (x + \alpha)$$

Sedangkan untuk  $b > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \sin k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke atas maka fungsinya berubah menjadi:

$$y - b = A \sin k x$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \sin k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke bawah maka fungsinya berubah menjadi:

$$y + b = A \sin k x$$

### **b) Pergeseran Grafik Fungsi Cosinus.**

Untuk  $\alpha > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \cos k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke kanan maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \cos k (x - \alpha)$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \cos k x$  digeser sejauh  $\alpha$  satuan ke kiri maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \cos k (x + \alpha)$$

Sedangkan untuk  $b > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \cos k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke atas maka fungsinya berubah menjadi:

$$y - b = A \cos k x$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \cos k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke bawah maka fungsinya berubah menjadi:

$$y + b = A \cos k x$$

### **c) Pergeseran Grafik Fungsi Tangen.**

Untuk  $\alpha > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \tan k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke kanan maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \tan k (x - \alpha)$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \tan k x$  digeser sejauh  $\alpha$  satuan ke kiri maka fungsinya berubah menjadi:

$$y = A \tan k (x + \alpha)$$

Sedangkan untuk  $b > 0$ , jika grafik fungsi  $y = A \tan k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke atas maka fungsinya berubah menjadi:

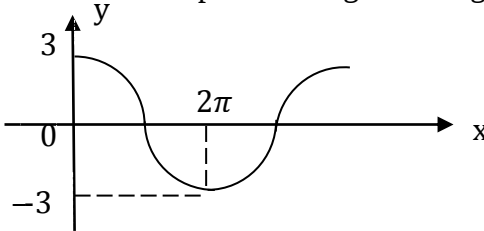
$$y - b = A \tan k x$$

dan jika grafik fungsi  $y = A \tan k x$  digeser sejauh  $b$  satuan ke bawah maka fungsinya berubah menjadi:

$$y + b = A \tan k x$$

**Contoh 01:**

Tentukanlah persamaan grafik fungsi di bawah ini!

**Penyelesaian:**

Amplitudo = 3,

Perioda =  $\frac{2\pi}{k}$

$$4\pi = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Jadi persamaan grafik fungsinya adalah  $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$

**Contoh 02:**

Jika grafik fungsi  $y = p \operatorname{tg} 2x$  dicerminkan terhadap sumbu  $x$  kemudian digeser  $q$  ke bawah dan  $r^\circ$  ke kanan, diperoleh grafik fungsi dengan persamaan  $y = 4 ( 2 - \operatorname{tg} (2x - 30^\circ) )$ . Tentukanlah nilai  $p + q + r$ .

**Penyelesaian:**

$$y = 4 ( 2 - \operatorname{tg} (2x - 30^\circ) )$$

$$y = 8 - 4 \operatorname{tg} 2(x - 15^\circ)$$

$$y - 8 = - 4 \operatorname{tg} 2(x - 15^\circ)$$

diperoleh  $p = 4$ ,  $q = - 8$  dan  $r = 15$  maka nilai  $p + q + r = 11$ .

## SOAL LATIHAN

1. Dua orang anak yang tingginya 1,4 meter berdiri berhadapan menghadap tiang bendera yang terletak di antara mereka. Jika kedua anak berjarak  $4\sqrt{3}$  meter dan melihat puncak tiang bendera dengan sudut masing-masing  $30^\circ$  dan  $60^\circ$  terhadap arah mendatar, tentukanlah tinggi tiang bendera tersebut.
2. Dua orang anak yang tingginya 1,2 meter berdiri berhadapan menghadap tiang bendera yang terletak di antara mereka. Jika kedua anak berjarak  $6\sqrt{3}$  meter dan melihat puncak tiang bendera dengan sudut masing-masing  $30^\circ$  dan  $60^\circ$  terhadap arah mendatar, tentukanlah tinggi tiang bendera tersebut.
3. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai  $\frac{\cos 870^\circ \cdot \sec 930^\circ}{\operatorname{tg} 600^\circ \cdot \sin 1110^\circ}$  dari
4. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai  $\frac{\cos 690^\circ \cdot \sec 750^\circ}{\operatorname{tg} 780^\circ \cdot \sin 1290^\circ}$  dari
5. Hitunglah nilai dari  $\frac{\sin 270^\circ \cdot \cos 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin 150^\circ \cdot \cos 225^\circ}$
6. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai  $\frac{\sin 780^\circ \cdot \operatorname{cosec} 210^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\cos 570^\circ \cdot \sec 240^\circ}$  dari
7. Jika  $\operatorname{tg}^2 x + 3 = p$ , untuk  $0 \leq x \leq 90^\circ$  dan  $p > 3$ , hitunglah nilai dari  $\sin x$ .
8. Diketahui  $x$  terletak dalam selang  $90^\circ < x < 180^\circ$  dan  $\operatorname{tg} x = m$ , tentukanlah hasil dari  $(\sin x - \cos x)^2$ .
9. Jika  $0 < x < \pi$  memenuhi persamaan  $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 12 = 0$  tentukanlah nilai dari  $\sin x$ ,
10. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel hitunglah nilai

- dari  $\frac{\cos 72^0 + \cos 135^0 + \cos 198^0}{\sin 72^0 + \sin 135^0 + \sin 198^0}$
11. Tentukanlah hasil dari  $\frac{\cos (m+n) + \cos (m-n)}{\sin (m+n) + \sin (m-n)}$
  12. Sederhanakanlah bentuk pembagian trigonometri dari  $\frac{\cos 16x + \cos 12x + \cos 8x}{\sin 16x + \sin 12x + \sin 8x}$
  13. Sederhanakanlah bentuk  $\frac{\sin 12x - \sin 8x + \sin 4x}{\cos 12x - \cos 8x + \cos 4x}$
  14. Buktikanlah bahwa :  $\frac{\cos 18x + \cos 16x + \cos 14x}{\sin 18x + \sin 16x + \sin 14x} = \text{ctg } 16x$
  15. Jika diketahui fungsi  $f(x) = \frac{150}{3 \sin 4x - 4 \cos 4x + m}$  mempunyai nilai maksimum 30, tentukanlah nilai minimum fungsi tersebut!
  16. Diketahui  $\text{tg } x = 2,4$  dengan  $x$  dalam selang  $180^0 < x < 270^0$ , hitunglah nilai  $\cos x + \sin x$ .
  17. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C. Jika  $\cos (A + C) = 2m$ , hitunglah nilai dari  $\sin A + \cos B$ .
  18. Diketahui segitiga ABC dengan  $\sin A = m$  dan  $A$  lancip tentukanlah nilai dari  $\text{tg } (B + C)$ ,
  19. Jika  $P$  dan  $Q$  lancip,  $\cos P = 0,8$  dan  $\cos Q = 0,6$  hitunglah nilai  $\sin (Q - P)$ .
  20.  $A, B, C$  adalah sudut-sudut sebuah segitiga. Jika  $\text{tg } A + \text{tg } C = 2 \text{ tg } B$  tentukan nilai dari  $\text{tg } A \cdot \text{tg } C$ .
  21. Bila  $\text{tg } 2x = m$ , tentukanlah nilai dari  $\sin 4x$ .
  22. Jika  $\sin 2x + \cos 2x = m$ , tentukanlah nilai dari  $\sin 4x$ .
  23. Sudut-sudut sebuah segitiga adalah  $P, Q$ , dan  $R$ . Jika  $P - Q = 30^0$  dan  $\sin R = \frac{5}{6}$  tentukanlah nilai dari  $\cos P \cdot \sin Q$ .
  24. Pada suatu segitiga PQR yang siku-suku pada R diketahui bahwa  $\sin P \cdot \sin Q = \frac{2}{5}$  dan  $\sin (P - Q) = 5m$ . Tentukanlah nilai  $m$ .
  25. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari  $\cos 3x = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$  untuk  $0^0 < x < 360^0$ .
  26. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan  $\cos 4x +$

- $\cos 2x = 4 \cos x$  untuk  $0^\circ < x < 360^\circ$ .
27. Untuk  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ . Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan  $2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ .
  28. Agar persamaan  $(p+1) \cos x + (p+2) \sin x = p + 3$  dapat diselesaikan tentukanlah interval  $p$  yang memenuhi.
  29. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}$  dapat hitung dengan mengubahnya ke persamaan  $\cos (x-\alpha) = a$ . Tentukanlah nilai  $x$  tersebut.
  30. Ubahlah bentuk  $4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x$  menjadi  $k \cos (x-\alpha)$ .
  31. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi  $y = \sqrt{3} \sin 3x - \sqrt{13} \cos 3x + 10$ .
  32. Jika nilai minimum dari fungsi  $f(x) = \frac{m}{15 \sin x - 8 \cos x} + 23$  sama dengan 3, tentukanlah nilai dari  $m + 10$ .
  33. Diketahui  $f(x) = 3 \cos 2x + 4 \sin 2x + c$ ,  $c$  suatu konstanta. Jika nilai maksimum  $f(x)$  adalah 10, tentukanlah nilai minimumnya.
  34. Gambarkan grafik dari fungsi  $y = 4 \sin 3x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
  35. Gambarkan grafik dari fungsi  $y = 3 \tan 2x + 4$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .
  36. Gambarkan grafik dari fungsi  $y = 2 \cos 2(x - 15^\circ) - 2$ , untuk interval  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .
  37. Gambarkan grafik dari fungsi  $y = -5 \sin (x + 30^\circ) + 3$ , untuk interval  $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .
  38. Jika nilai maksimum dari fungsi  $y = 4 - 2m \sin^2 3x$  sama dengan 10, tentukanlah  $m$  dan nilai minimumnya.
  39. Diketahui fungsi  $f(x) = 8 \sin 3x - 4$ . Tentukanlah amplitudo, perioda, nilai maksimum dan nilai minimumnya.
  40. Diketahui fungsi  $f(x) = 10 - 4 \cos (30^\circ - 4x)$ . Tentukanlah amplitudo, perioda, nilai maksimum dan nilai minimumnya.

## **DAFTAR PUSTAKA**

Edwin J. Purcell and Dale Varberg. 1987. Calculus and Analitiic Geometry. Pp 62 – 71).



# BAB VII

## DIFERENSIASI DAN APLIKASINYA

Oleh Lucy Asri Purwasi

### 7.1 Pendahuluan

Diferensiasi atau turunan merupakan bagian ilmu yang terintegrasi dari cabang ilmu kalkulus, setelah materi fungsi dan limit. Selain itu juga konsep dan prinsip dasar turunan merupakan materi yang sangat penting untuk disampaikan karena sebagai materi prasyarat dalam mempelajari integral. Sehingga materi ini menjadi satu kesatuan yang utuh dalam mempelajari cabang ilmu kalkulus. Dalam pokok bahasan diferensiasi dengan aplikasinya akan dibahas terkait turunan fungsi, aturan turunan fungsi, fungsi trigonometri, turunan dengan notasi Leibniz, dan turunan tingkat tinggi.

### 7.2 Turunan Fungsi

Diketahui perubahan kecepatan nilai fungsi  $y = f(x)$  terhadap variabel bebas  $x$  dimana nilai  $x = c$ , yang secara geometri diilustrasikan sebagai kemiringan garis singgung pada kurva  $y = f(x)$  di  $Q(c, f(c))$  sehingga diperoleh

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$  disebut perubahan kecepatan nilai fungsi  $f$  pada  $x = c$ . Limit ini merupakan turunan atau derivatif fungsi  $f$  pada  $x = c$ . Sehingga

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

disebut sebagai turunan fungsi  $f$  di  $x$  yang dinotasikan dengan  $f'(x)$ .

Sehingga diperoleh definisi turunan fungsi, yaitu:

Jika fungsi  $y = f(x)$  akan diturunkan di  $x$ , maka diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dengan syarat nilai limitnya ada, fungsi  $f$  dikatakan terdiferensial di  $x$  dan  $f'$  disebut fungsi turunan dari  $f$ .

### Contoh 1.

Tentukan turunan fungsi pertama dari

- a.  $f(x) = 6$
- b.  $f(x) = x + 4$
- c.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 16$
- d.  $f(x) = \frac{4}{x}$

Penyelesaian:

- a.  $f(x) = 6$ , maka  $f(x+h) = 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, turunan adalah  $f'(x) = 0$

- b.  $f(x) = x + 4$ , maka  $f(x+h) = x + h + 4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+4) - (x+4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h+4-x-4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, turunan adalah  $f'(x) = 1$

c.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 16$

Maka  $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 4(x+h) + 16$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 4(x+h) + 16 - (2x^2 - 4x + 16)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 4(x+h) + 16 - 2x^2 + 4x - 16}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 4x - 4h + 16 - 2x^2 + 4x - 16}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 4 \\ &= 4x + 2(0) - 4 \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

Jadi, turunan adalah  $f'(x) = 4x - 4$

d.  $f(x) = \frac{3}{x}$ , maka  $f(x+h) = \frac{3}{x+h}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{(x+h)x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x - 3x - 3h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{hx(x+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x+h)} \\
&= \frac{-3}{x(x+0)} \\
&= \frac{-3}{x^2}
\end{aligned}$$

Jadi, turunannya adalah  $f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

Sehingga dari **conso 1** dapat diambil kesimpulan untuk langkah-langkah dalam menentukan turunan fungsi, yaitu:

1. Tentukan nilai fungsi  $f(x+h)$
2. Tentukan selisih  $f(x+h)$  dan  $f(x)$ , dimana dapat ditulis  $f(x+h) - f(x)$
3. Sederhanakan atau bagilah nilai  $h$  penyebut pada bagian  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. Substitusikan nilai limit  $h \rightarrow 0$ , kemudian hitung nilai turunan  $f'(x)$

### 7.3 Aturan-Aturan Turunan Fungsi

Pada bagian sebelumnya sudah dibahas bagaimana menentukan turunan fungsi  $f(x)$  dengan menggunakan definisi memakan waktu dan manipulasi bentuk aljabar. Sehingga kita dapat menggunakan aturan-aturan turunan fungsi agar penyelesaiannya lebih efektif dan praktis. Menurut Razali et al., (2010); Sutrisma and Usodo (2009) aturan-aturan turunan fungsi ini terdiri dari beberapa teorema dan pembuktiannya, sehingga dapat langsung digunakan dalam mempermudah penyelesaian permasalahan atau soal bentuk turunan fungsi.

**Teorema 7.3.1 (Aturan Fungsi Konstanta)**

Jika fungsi  $f(x) = a$ , dengan  $a$  adalah konstanta, maka  $f'(x) = 0$

**Pembuktian:**

Berdasarkan definisi turunan fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti untuk  $f(x) = a$ , dengan  $a$  konstan maka  $f'(x) = 0$  ■

**Contoh 2:**

Tentukan turunan dari fungsi  $f(x) = 25$ .

**Penyelesaian:**

Karena  $f(x) = 25$  menunjukkan fungsi konstan maka  $f'(x) = 0$ .

**Teorema 7.3.2 (Aturan Eksponen)**

Jika  $f(x) = ax^n$ , dimana  $n$  adalah bilangan rasional maka  $f'(x) = nax^{n-1}$

**Pembuktian:**

Dengan menggunakan Teorema Binomial kita akan menguraikan  $(x+h)^2$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n) - ax^n}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} a(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\
&= a \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) \\
&= a(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(0) + \dots + (0)^{n-1}) \\
&= nax^{n-1}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti untuk  $f(x) = ax^n$ , maka  $f'(x) = anx^{n-1}$  ■

### Contoh 3:

Tentukan turunan  $f(x)$  untuk masing-masing fungsi berikut.

a.  $f(x) = 5x^6$

b.  $f(x) = \frac{6}{x^4}$

c.  $f(x) = 9\sqrt[3]{x}$

d.  $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x^3}}$

Penyelesaian:

a.  $f(x) = 5x^6$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6 \cdot 5x^{6-1} \\
&= 30x^5
\end{aligned}$$

Jadi, turunannya adalah  $f'(x) = 30x^5$

b.  $f(x) = \frac{5}{x^4} = 5x^{-4}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -4 \cdot 5x^{-4-1} \\
&= -20x^{-5}
\end{aligned}$$

Jadi, turunannya adalah  $f'(x) = -20x^{-5}$

$$c. \quad f(x) = 9\sqrt[3]{x} = 9x^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9x^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{9}{3} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} \\ &= 3x^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Jadi, turunannya adalah  $f'(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$d. \quad f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}} = 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{6}{2} x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = -3x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

Jadi, turunannya adalah  $f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{x^5}}$

#### Contoh 4:

Selesaikan soal turunan fungsi di bawah ini:

a. Jika  $f(x) = 6x^3$ , tentukan  $f'(-2)$

b. Jika  $f(x) = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}$ , tentukan  $f'(1)$

c. Jika  $f(x) = \frac{8}{x^2}$ , tentukan  $f'(-1)$

d. Jika  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ , tentukan  $f'(4)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} a. \quad f(x) &= 6x^3 \\ &= 3 \cdot 6x^{3-1} \\ &= 18x^2 \end{aligned}$$

Maka  $f'(-2) = 18(-2)^2 = 18 \cdot 4 = 72$

Jadi, nilai turunan  $f'(-2) = 72$ .

$$\begin{aligned} \text{b. } f(x) &= \frac{5}{2} \sqrt[5]{x^2} = \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}-1} \\ &= \frac{10}{10} x^{\frac{2}{5}-\frac{5}{5}} \\ &= x^{-\frac{3}{5}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \end{aligned}$$

Maka  $f'(1) = \frac{1}{\sqrt[5]{(1)^3}} = \frac{1}{1} = 1$

Jadi, nilai turunan  $f'(1) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{c. } f(x) &= \frac{8}{x^2} = 8x^{-2} \\ f'(x) &= -2 \cdot 8x^{-2-1} \\ &= -16x^{-3} \\ &= -\frac{16}{x^3} \end{aligned}$$

Maka  $f'(-1) = -\frac{16}{(-1)^3} = \frac{-16}{-1} = 16$

Jadi, nilai turunan  $f'(-1) = 16$ .

$$\begin{aligned} \text{d. } f(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \\ f'(x) &= x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \sqrt{x} \\
\text{Maka } f'(4) &= \frac{3}{2} \sqrt{4} \\
&= \frac{3}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Jadi, nilai turunan  $f'(4) = 3$ .

### **Teorema 7.3.3 (Aturan Perkalian Fungsi dan Konstanta)**

Misalkan diberikan  $u$  suatu fungsi,  $a$  konstanta dan  $f$  fungsi yang didefinisikan oleh  $f(x) = au(x)$ . Sehingga turunan  $f$  fungsi adalah

Berdasarkan definisi turunan fungsi diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{au(x+h) - au(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} a \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&= au'(x)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti untuk  $f(x) = au(x)$ , maka  $f'(x) = au'(x)$  ■

### **Teorema 7.3.4 (Aturan penjumlahan dan Pengurangan Fungsi)**

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah suatu fungsi, maka  $f$  fungsi didefinisikan dengan  $f(x) = u(x) \pm v(x)$ . Sehingga turunan  $f$  fungsi adalah

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

**Pembuktian:**

Berdasarkan definisi turunan fungsi diperoleh

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - \{u(x) + v(x)\}}{h} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= u'(x) + v'(x)
 \end{aligned}$$

Pembuktian ini juga berlaku untuk bentuk operasi pengurangan fungsi. Bentuk ini juga akan berlaku pada fungsi suku banyak, dengan cara menurunkan masing-masing tiap sukunya.

Jadi terbukti untuk setiap fungsi  $f(x) = u(x) \pm v(x)$ , maka  $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$  ■

**Contoh 5:**

Tentukan turunan  $f(x)$  dari:

- $f(x) = 5x^2 + 6x$
- $f(x) = -2x^4 - 4x^3$
- $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 5x^2 + 4x$

**Penyelesaian:**

a.  $f(x) = 5x^2 + 6x$

Jika  $u(x) = 5x^2$  maka diperoleh  $u'(x) = 2.5x^{2-1} = 10x$

Jika  $v(x) = 6x$  maka diperoleh  $v'(x) = 1.6x^{1-1} = 6x^0 = 6$

Jadi, jika  $f(x) = u(x) + v(x)$ , maka  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 10x + 6$

b.  $f(x) = -2x^4 - 4x^3$

Jika  $u(x) = -2x^4$  maka diperoleh  $u'(x) = -4.2x^{4-1} = -8x^3$

Jika  $v(x) = 4x^3$  maka diperoleh  $v'(x) = 3.4x^{3-1} = 12x^2$

Jadi, turunan  $f'(x) = -8x^3 - 12x^2$

c.  $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 5x^2 + 4x$

Jika  $u(x) = 2x^5$  maka diperoleh  $u'(x) = 5.2x^{5-1} = 10x^4$

Jika  $v(x) = 6x^3$  maka diperoleh  $v'(x) = 3.6x^{3-1} = 18x^2$

Jika  $w(x) = 5x^2$  maka diperoleh  $w'(x) = 2.5x^{2-1} = 10x$

Jika  $z(x) = 4x$  maka diperoleh  $z'(x) = 1.4x^{1-1} = 4x^0 = 4$

Jadi, turunan  $f'(x) = 10x^4 - 18x^2 + 10x + 4$

### Teorema 7.3.5 (Aturan Perkalian Fungsi)

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah suatu fungsi, maka  $f$  fungsi didefinisikan dengan  $f(x) = u(x).v(x)$ . Sehingga turunan  $f$  fungsi adalah

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

### Pembuktian:

Berdasarkan definisi turunan fungsi diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x) + u(x+h).v(x) - u(x+h).v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x) - u(x).v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\}.v(x) + u(x+h).\{v(x+h) - v(x)\}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} v(x) + \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Jadi terbukti untuk setiap fungsi  $f(x) = u(x).v(x)$  maka

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x) \blacksquare$$

**Teorema 7.3.6 (Aturan Pembagian Fungsi)**

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah suatu fungsi, maka  $f$  fungsi didefinisikan dengan  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  dengan  $v(x) \neq 0$  Sehingga turunan  $f$  fungsi adalah

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

**Pembuktian:**

Berdasarkan definisi turunan fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x) - v(x+h) \cdot u(x)}{h v(x+h) v(x)} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x) - v(x+h) \cdot u(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x)}{h v(x+h) v(x)} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x) - \{v(x+h) - v(x)\} \cdot u(x)}{h v(x+h) v(x)} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x)}{v(x+h) v(x)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)}{v(x+h) v(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ \text{Dimana } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)} &= \frac{1}{v(x)} \\ f'(x) &= u'(x) \cdot \frac{v(x)}{v^2(x)} - \frac{u(x)}{v^2(x)} \cdot v'(x) , \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x)}{v^2(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk setiap fungsi  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  maka  

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)} \blacksquare$$

### Contoh 6:

Carilah turunan fungsi  $f(x)$  berikut.

- $f(x) = (4x + 5)(2x - 3)$
- $f(x) = (3x^2 + 4)(5x^2 - 2)$
- $f(x) = (5x^3 + 2)(x^2 - 3)$
- $f(x) = \frac{x-5}{4x+2}$
- $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x}$

### Penyelesaian:

a.  $f(x) = (4x + 5)(2x - 3)$

Jika  $u(x) = 4x + 5$  maka diperoleh  $u'(x) = 4$

Jika  $v(x) = 2x - 3$  maka diperoleh  $v'(x) = 2$

$$f'(x) = 4 \cdot (2x - 3) + (4x + 5) \cdot 2$$

$$f'(x) = 8x - 12 + 8x + 10$$

$$f'(x) = 16x - 2$$

$$\text{Jadi, } f'(x) = 16x - 2$$

b.  $f(x) = (3x^2 + 4)(5x^2 - 2)$

Jika  $u(x) = 3x^2 + 4$  maka diperoleh  $u'(x) = 6x$

Jika  $v(x) = 5x^2 - 2$  maka diperoleh  $v'(x) = 10x$

$$f'(x) = 6x \cdot (5x^2 - 2) + (3x^2 + 4) \cdot 10x$$

$$f'(x) = 30x^3 - 12x + 30x^3 + 40x$$

$$f'(x) = 60x^3 - 28x$$

$$\text{Jadi, turunan } f'(x) = 60x^3 - 28x$$

c.  $f(x) = (5x^3 + 2)(x^2 - 3)$

Jika  $u(x) = 5x^3 + 2$  maka diperoleh  $u'(x) = 15x^2$

Jika  $v(x) = x^2 - 3$  maka diperoleh  $v'(x) = 2x$

$$f(x) = 15x^2 \cdot (x^2 - 3) + (5x^3 + 2) \cdot 2x$$

$$f(x) = 15x^4 - 45x^2 + 10x^4 + 4x$$

$$f(x) = 25x^4 - 45x^2 + 4x$$

$$\text{Jadi, turunan } f'(x) = 25x^4 - 45x^2 + 4x$$

$$\text{d. } f(x) = \frac{x-5}{4x+2}$$

$$\text{Jika } u(x) = x - 5 \text{ maka diperoleh } u'(x) = 1$$

$$\text{Jika } v(x) = 4x + 2 \text{ maka diperoleh } v'(x) = 4$$

$$\text{Jika } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ maka } f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$= \frac{1 \cdot (4x + 2) - (x - 5) \cdot 4}{(4x + 2)^2}$$

$$= \frac{4x + 2 - 4x + 20}{16x^2 + 16 + 4}$$

$$= \frac{22}{16x^2 + 16 + 4}$$

$$= \frac{22}{16x^2 + 16 + 4}$$

$$\text{Jadi, Jika } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ maka}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{22}{16x^2 + 16 + 4}$$

$$\text{e. } f(x) = \frac{x^2+1}{1-x}$$

$$\text{Jika } u(x) = x^2 + 1 \text{ maka diperoleh } u'(x) = 2x$$

$$\text{Jika } v(x) = 1 - x \text{ maka diperoleh } v'(x) = -1$$

$$\text{Jika } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ maka } f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$= \frac{2x \cdot (1 - x) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{2x - 2x^2 - 2x^3 - 2x}{1 - 2x + x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + x^2}$$

### Teorema 7.3.7 (Aturan Rantai)

Misalkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah suatu fungsi, maka  $f$  fungsi didefinisikan dengan  $f(x) = [g(x)]^n$  dengan  $n$  adalah anggota bilangan real. Sehingga turunan  $f$  fungsi adalah

$$\text{Jadi, Jika } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ maka } f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + x^2}$$

## 7.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Adapun aturan rumus turunan yang digunakan dalam fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

1. Jika  $y = \sin a$ , maka  $y' = \cos a$
2. Jika  $y = \cos a$ , maka  $y' = -\sin a$
3. Jika  $y = \tan a$ , maka  $y' = \sec^2 a$
4. Jika  $y = \cot a$ , maka  $y' = -\operatorname{cosec}^2 a$
5. Jika  $y = \sec a$ , maka  $y' = \sec a \tan a$
6. Jika  $y = \operatorname{cosec} a$ , maka  $y' = -\operatorname{cosec} a \cdot \cot a$
7. Jika  $y = \sin^n a$ , maka  $y' = n \cdot \sin^{n-1} a \cdot \cos a$
8. Jika  $y = \cos^n a$ , maka  $y' = -n \cdot \cos^{n-1} a \cdot \sin a$
9. Jika  $y = \sin B$ , maka  $y' = \cos B \cdot B'$
10. Jika  $y = \cos B$ , maka  $y' = -\sin B \cdot B'$
11. Jika  $y = \tan B$ , maka  $y' = B' \sec^2 B$
12. Jika  $y = \cot B$ , maka  $y' = -B' \operatorname{cosec}^2 B$
13. Jika  $y = \sec B$ , maka  $y' = B' \sec B \tan B$
14. Jika  $y = \operatorname{cosec} U$ , maka  $y' = -B' \operatorname{cosec} B \cdot \cot B$
15. Jika  $y = \sin^n U$ , maka  $y' = n \cdot B' \sin^{n-1} B \cdot \cos B$
16. Jika  $y = \cos^n U$ , maka  $y' = -n \cdot B' \cos^{n-1} B \cdot \sin B$

## 7.5 Turunan dengan Notasi Leibniz

Pada bagian pembahasan sebelumnya terkait turunan fungsi kita sudah mengenal notasi turunan  $f(x)$  adalah  $f'(x)$ . Namun sekarang kita akan menggunakan notasi dari turunan Leibniz, yaitu  $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$ , dimana  $y = f(x)$ . Notasi Leibniz ini ditemukan oleh seorang ahli filsuf pada bidang matematika yang berasal dari Jerman, yaitu Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716) notasi ini dinamakan Double d Leibnitz, atau lebih dikenal dengan notasi Leibnitz.

Jika diberikan fungsi  $y = f(x)$ , maka turunan fungsi dengan notasi Leibniz dinyatakan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) ,$$

turunan y terhadap x.

## 7.6 Turunan Tingkat Tinggi

Jika  $f'(x)$  adalah turunan pertama dari  $f(x)$ , maka  $f''(x)$  adalah turunan kedua dari  $f(x)$ . Sehingga dapat dinotasikan dengan  $f''(x) = y'' = \frac{d^2f}{dx} = \frac{d^2y}{x^2}$ . Dengan cara yang sama turunan ketiga dari  $f(x)$  dapat dinyatakan dengan  $f'''(x)$  atau  $y'''$  atau  $\frac{d^3f}{dx}$  atau  $\frac{d^3y}{x^3}$ . Secara umum turunan ke-n dari fungsi  $f(x)$  atau dapat ditulis dengan  $f^n(x)$  atau  $y^n$  atau  $\frac{d^ny}{x^n}$ .

### Contoh 7:

Tentukan turunan  $f(x)$  menggunakan aturan rantai untuk fungsi  $(3x^2 + 4)^2$

#### Penyelesaian:

$$f(x) = (3x^2 + 4)^2$$

$$g(x) = 3x^2 + 4 \rightarrow g'(x) = 6x$$

$$\text{Jika } f(x) = [g(x)]^n \text{ maka } f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Sehingga diperoleh

$$= 2 \cdot (3x^2 + 4)^2 \cdot 6x$$

$$= 12x (3x^2 + 4)^2$$

Jadi, turunan  $f(x) = (3x^2 + 4)^2$  adalah  $12x (3x^2 + 4)^2$

### Contoh 8:

Tentukan turunan fungsi trigonometri berikut ini.

a.  $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos x$

#### Penyelesaian:

$$u(x) = y = \sin x \rightarrow u'(x) = y' = \cos x$$

$$v(x) = y = \cos x \rightarrow v'(x) = y' = -\sin x$$

$$y = u(x) - v(x) \rightarrow y' = u'(x) - v'(x)$$

Sehingga diperoleh

$$f'(x) = y' = 3 \cos x - 5(-\sin x)$$

$$f'(x) = y' = 3 \cos x + 5 \sin x$$

Jadi, turunan  $f'(x) = y' = 3 \cos x + 5 \sin x$

b.  $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$

#### Penyelesaian:

$$u(x) = y = \sin x \rightarrow u'(x) = y' = \cos x$$

$$v(x) = y = \cos x \rightarrow v'(x) = y' = -\sin x$$

$$y = u(x) \cdot v(x) \rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Sehingga diperoleh

$$f'(x) = y' = 2[\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)]$$

$$f'(x) = 2[\cos^2 x - \sin^2 x]$$

$$f'(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

Jadi, turunan  $f'(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$

c.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

#### Penyelesaian:

$$u(x) = y = \sin x \rightarrow u'(x) = y' = \cos x$$

$$v(x) = y = \sin x \cos x \rightarrow u'(x) = y' = \cos x \cdot \cos x - \sin x$$

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Sehingga diperoleh

$$= \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - \sin x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}, \text{Gunakan sifat identitas bahwa } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\text{Jadi, turunan } f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

### Contoh 9:

Tentukan turunan pertama dan kedua dari setiap fungsi yang diberikan

a.  $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 1$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x$$

b.  $f(x) = (2x - 5)^7$

**Penyelesaian:**

$$f'(x) = 7 \cdot (2x - 5)^6 \cdot 2 = 14(2x - 5)^6$$

$$f''(x) = 14 \cdot 6(2x - 5)^5 \cdot 2 = 168(2x - 5)^5$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, A. K., Sitanggang, Tri Andri Hutapea, L. P. S., Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, Y. T., & Bayuzetra. 2014. *Buku Bse Matematika Kelas 11*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.
- Djumanta, W., & R Sudrajat. 2008. *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika untuk Kelas XI Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Program Ilmu Pengetahuan Alam*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Razali, M., Siregar, M. N., & Marpaung, F. 2010. *Kalkulus Diferensial*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- Saraswati, S., & Rodliyah, I. 2020. *Kalkulus Dasar Pendekatan Blended Learning*. Banten: CV. AA. Rizky.
- Soedyarto, N., & Maryanto. (2008). *Matematika Untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPA*. Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Sutrisma, & Usodo, B. 2009. *Wahana Matematika Untuk SMA/MA Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Alam*. Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.



# BAB VIII

## INTEGRAL TAK TENTU

Oleh Joni Wilson Sitopu

### 8.1 Pendahuluan

Pada materi ini akan diperkenalkan anti turunan suatu fungsi dan memformalkannya sebagai integral tak tentu. Akan menurunkan seperangkat aturan yang akan membantu perhitungan saat memecahkan masalah. Integral yang digunakan dalam menangani masalah yang pada dasarnya berbeda. Jenis pertama adalah masalah turunan suatu fungsi, atau laju perubahannya, atau kemiringan grafiknya, adalah diketahui dan ingin dicari fungsinya. Maka, yang dicari adalah kebalikan proses diferensial. Proses kebalikan ini dikenal sebagai antidiferensiasi, atau diperoleh fungsi primitif, atau integral tak tentu. ( R Horan & M Lavelle, (2004)

### 8.2 Definisi Integral sebagai Anti-Turunan

Jika  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  maka  $y$  adalah fungsi yang mempunyai turunan  $f(x)$  dan disebut anti turunan (antiderivate) dari  $f(x)$  atau integral tak tentu dari  $f(x)$  yang diberi notasi  $\int f(x)dx$ . Sebaliknya, jika  $y = \int f(v)dv$ , karena turunan dari suatu konstanta adalah nol, maka suatu integral tak tentu mempunyai suku konstanta sembarang (R Horan & M Lavelle, (2004).

### 8.2.1. Antiderivative

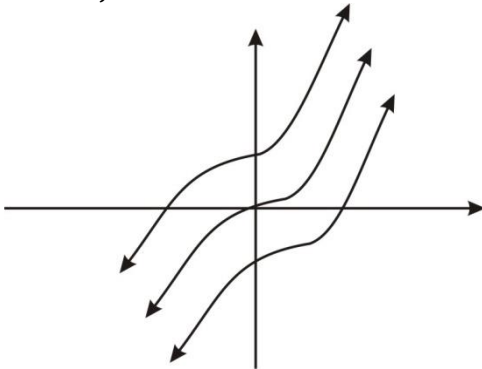
#### Definition

Sebuah fungsi  $F(x)$  disebut **antiderivative** dari fungsi  $f$ , jika  $F'(x) = f(x)$  untuk semua  $x$  pada domain dari  $f$ , ditulis, (Elliott Mendelson, (1997)).

$$F(x)' = f(x), \quad \frac{d(Fx)}{dx} = f(x),$$
$$\int dF(x) = \int f(x)dx + C$$

#### Contoh 1:

Pandang fungsi  $f(x) = 6x^2$ , Karena membedakan  $F'(x)$  diperoleh  $f(x)$ , pandang  $F(x) = 2x^3 + c$  akan bekerja untuk konstanta  $c$ . Secara grafis, ambil himpunan semua antiturunan sebagai transformasi vertikal dari grafik  $F(x) = 2x^3$ . Angka tersebut menunjukkan dua transformasi sbb,



Dengan definisi dan contoh diatas tersebut, untuk memformalkan definisi dan mengembangkan beberapa aturan yang berguna untuk tujuan komputasi, dan dapat dilihat beberapa aplikasi.

### 8.2.2 Notasi dan Pengertian Integral Tak tentu

Proses untuk mencari antiderivatif disebut antidiferensial, lebih sering disebut sebagai integral. Notasi tertentu yang di gunakan untuk menunjukkan integral yaitu:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Persamaan ini disebut integral tak tentu terhadap  $f(x)$  berintegrasi terhadap  $x$ . Fungsi  $f(x)$  disebut integran dan  $c$  disebut konstanta integrasi. Notasi ini menunjukkan integral terhadap  $x$ .

**Contoh 1 :**

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + c$$

Sisi kiri persamaan disebut integral tak tentu terhadap fungsi disebut integran dan konstanta  $c$  disebut konstanta integrasi. Notasi ini menunjukkan integral terhadap  $x$ .

### 8.2.3 Menggunakan Derivatif untuk Menurunkan Aturan

#### Dasar Integrasi

Seperti halnya diferensiabel, ada beberapa aturan berguna yang dapat diperoleh untuk membantu perhitungan dalam memecahkan masalah. Yang pertama adalah aturan untuk,

$$f(x) = x^n, (n \neq -1)$$

Integralnya dinyatakan sebagai berikut:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx \quad (\text{Mary Barnes, (1999)})$$

Aturan ini dapat dibuktikan dengan mudah. misalkan  $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$ . Sama sama diturunkan terhadap  $x$ , diperoleh :

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) + \frac{d}{dx} (C) \\
 &= \left( \frac{1}{n+1} \right) \frac{d}{dx} (x^{n+1}) + \frac{d}{dx} (C) \\
 &= \left( \frac{n+1}{n+1} \right) x^n + 0 \\
 &= x^n
 \end{aligned}$$

Aturan berlaku untuk  $f(x) = x^n, n \neq -1$ .

Jika dalam kasus yang memiliki fungsi untuk diintegrasikan dengan  $n \neq -1$ , maka  $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$ . Sehingga aturan tersebut tidak berlaku karena akan menghasilkan pembagian dengan 0. Namun, jika terdapat masalah sebagai temuan  $F(x)$  shg  $F'(x) = \frac{1}{x}$ , maka perlu diketahui bahwa turunan dari fungsi logaritma memiliki bentuk,  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ . Karenanya

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Selain fungsi logaritma, ada yang disebut fungsi eksponensial,  $f(x) = e^x$ , karena turunannya sama dengan dirinya sendiri. Maka diperoleh,  $\int e^x dx = e^x + c$ . (dapat dibuktikan, qed).

Seperti halnya diferensiabel tersebut diatas, dapat dikembangkan beberapa aturan untuk fungsi yang dapat diintegrasikan, misalkan,

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat diintegrasikan, dan  $c$  merupakan konstanta, maka;

1.  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ , karena  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) = x^n$ ,  
dimana  $n \neq -1$
2.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3.  $\int c f(x) dx = c \int f(x)$
4.  $\int e^x dx = e^x + c$ , karena  $\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$
5.  $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$ , karena  $\frac{d}{dx} (e^{f(x)}) = e^{f(x)}$
6.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ , karena  $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$ , dimana  $x > 0$

Aturan ini bentuk khusus (*a special form*) dari *the power function*  $x^n$  karena untuk  $n = 1$  tidak bisa dilakukan atas dasar aturan (*the power rule*) sebab  $\frac{1}{0} = \infty$  dan

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c, \quad \text{dimana } f(x) > 0$$

$$= \ln |f(x)| + c, \quad \text{dimana } f(x) \neq 0$$

### Contoh 2:

Hitunglah indefinite integral berikut ini ;

$$\int \left( 4x^3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 3 \right) dx$$

**Penyelesaian :**

$$\int \left( 4x^3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 3 \right) dx$$

$$= 4 \int x^3 dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + 3 \int dx$$

$$= x^4 + \frac{2}{-1} x^{-3} - \ln x + 3x + c$$

$$= x^4 - \frac{2}{x^3} - \ln x + 3x + c$$

aturan ini kadang dapat dimodifikasi karena operasi perhitungan dengan konstanta seperti yang terjadi pada contoh berikut :

### Contoh 3:

Hitunglah indefinite integral berikut ini :

$$\int e^{2x} dx$$

**Penyelesaian :**

Aturan untuk mengintegalkan fungsi eksponensial tidak dapat dilakukan karena  $\frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x}$ , Namun, perlu diingat bahwa untuk membagi fungsi asli dengan konstantanya, sehingga diperoleh anti turunan yang benar yaitu,

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

Sehingga aturan dalam bentuk umum dapat ditulis sebagai berikut,

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$$

### 8.3 Integral Substitusi

Salah satu cara untuk menyelesaikan integral hitung adalah dengan substitusi. Beberapa bentuk integral yang dapat diselesaikan dengan melakukan substitusi tertentu ke dalam fungsi yang diintegrasikan, misalnya bentuk (R Horan & M Lavelle, (2004) ;

$$\int u^n du$$

Pada pembahasan sebelumnya, diperoleh ;

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx + c$$

maka, untuk menyelesaikan integral dalam bentuk  $\int f(x)^n dx$  dapat menggunakan substitusi  $u = f(x)$  sehingga integral tersebut berbentuk  $\int u^n du$ .

Sehingga diperoleh,  $\int u^n du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx + c$ . maka, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\int (f(x))^n d(f(x)) = \int u^n du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx + c, \text{ dengan } u = f(x) \text{ dan } n \neq -1.$$

#### Contoh 4 :

Tentukan integral berikut.

a.  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$

b.  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+1}} dx$

Penyelesaian ;

a.  $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$

Misalkan  $u = x^2 - 1$ , maka  $du = 2x dx$ , sehingga  $\frac{1}{2} du = x dx$ , jadi,

$$\int x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int \sqrt{u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

Atau

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 - 1} d(x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\frac{1}{2} + 1)} \right) (x^2 - 1)^{\frac{1}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

b.  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int (2x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} d(2x^3 + 1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} (2x^3 + 1)^{-\frac{1}{2} + 1} + c \\ &= (2x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

## 8.4 Integral parsial (integration by parts)

Integral parsial ditulis dalam bentuk integral,  $\int \mathbf{u} d\mathbf{v} = \mathbf{uv} - \int \mathbf{v} d\mathbf{u}$  dimana  $u$  dan  $v$  adalah dalam variabel  $x$ . Hubungan antara  $\int \mathbf{u} d\mathbf{v}$  dan  $\int \mathbf{v} d\mathbf{u}$ , kedua integral tersebut dapat diperoleh penyelesaiannya. ( Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S.,(2006)).

Misalnya  $y = uv$  dengan  $y = y(x), u = u(x), dan v = v(x)$  merupakan fungsi diferensiabel. Jika fungsi  $y$  diturunkan maka diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Dimana ;

$$dy = u dv + v du$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

Kedua ruas sama sama diintegralkan maka diperoleh :

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

Sehingga diperoleh,

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Rumus di atas terlihat bahwa u dan dv (yang mengandung dx) disebut sebagai integral parsial. Penggunaannya harus diperhatikan bagian yang dipilih sebagai dv harus dapat diintegralkan dan  $\int v du$  harus dapat diselesaikan dengan sederhana daripada  $\int u dv$ .

### Contoh 5 :

Tentukan  $\int x \sqrt{x} dx$

Penyelesaian :

Misalkan,  $u = x$ , maka  $du = dx$

$$dv = \sqrt{x} dx, \text{ maka } v = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

sehingga :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x} dx &= x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} \right) + c \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15} x^{\frac{5}{2}} + c \\ &= \frac{6}{15} x^{\frac{5}{2}} + c \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}\end{aligned}$$

### Contoh 6 :

Tentukan :  $\int x\sqrt{1+x} dx$

Penyelesaian :

Misalkan  $u = x$ , maka  $du = dx$ .

$$dv = \sqrt{1+x} dx, \text{ maka } v = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du \\ \int x\sqrt{1+x} dx &= x \left( \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right) - \int \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} dx \\ \int x\sqrt{1+x} dx &= \frac{2}{3} x (1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (1+x)^{\frac{5}{2}} + c\end{aligned}$$

Ada suatu metode untuk mempermudah menghitung integral parsial yang digunakan untuk menyelesaikan  $\int u dv$ , apabila turunan ke-k dari fungsi  $u(x)$  bernilai nol dan integral ke-k dari fungsi  $v = v(x)$  ada.

**Contoh 7 :**

Tentukan hasil integral,  $\int \frac{3x^2}{(x+2)^4} dx$

penyelesaian :

$$\int \frac{3x^2}{(x+2)^4} dx = \int (x+2)^{-4} dx^3$$

**8.5 Rumus-rumus Integral Tak Tentu**

1.  $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$
2.  $\int \sin x = -\cos x + c$
3.  $\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$
4.  $\int \cos x dx = \sin x + c$
5.  $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$
6.  $\int \tan x dx = \ln \sec x = -\ln \cos x + c$
7.  $\int \cot x dx = \ln \sin x + c$
8.  $\int \sec x dx = \tan x + c$
9.  $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln(\operatorname{cosec} x - \cotan x) + c$
10.  $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
11.  $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotan x + c$
12.  $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$
13.  $\int \cotan^2 x dx = -\cotan x - x + c$
14.  $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + c$
15.  $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + c$
16.  $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + c$
17.  $\int \operatorname{cosec} x \cotan x dx = -\operatorname{cosec} x + c$
18.  $\int \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + c$
19.  $\int \cos^n x \sin x dx = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x + c$

**Soal latihan :**

a.  $\int (2x^2 + 5x + 2) dx$

b.  $\int \left( 2e^{3x} + \frac{5x}{3x^2+4} \right) dx$

c.  $\int 6x^2 (x^3 + 2)^{99} dx$

d.  $\int 8e^{2x+3} dx$

e.  $\int \frac{4x}{5x^2+2} dx$

f.  $\int \frac{2x^2}{(3x+2)^4} dx$

## DAFTAR PUSTAKA

- Elliott Mendelson. 1997. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Beginning Calculus Second Edition*. The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. Printed in the United States of America.
- Mary Barnes. 1999. *Mathematics Learning Centre, Introduction to Integration Part 1: Anti-Differentiation*. University of Sydney.
- Paul Dawkins. 2003. *Calculus 1 Practice Problems*. Lamar University.
- Robert Wrede, and Murray R. Spiegel. 2002. *Theory and Problems of ADVANCED CALCULUS*. Second Edition. Schaum's Outline Series McGRAW-HILL New York Chicago San Francisco Lisbon London Madrid Mexico City Milan New Delhi San Juan Seoul Singapore Sydney Toronto.
- R Horan & M Lavelle. 2004. *Basic Mathematics*. PPLATO material, Plymouth University.
- Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S. 2006. *Calculus*, 9th ed., Pearson..

# **BAB IX**

## **GEOMETRI**

**Oleh Aldi Cahya Muhammad**

### **9.1 Definisi**

Kata geometri secara harfiah berarti pengukuran bumi. Ketika geometri adalah dikembangkan oleh orang dahulu dari berbagai budaya, itu mungkin untuk pengukuran bumi, yaitu survei. Dalam matematika saat ini, geometri umumnya mengacu untuk mempelajari kurva dan permukaan. Cabang-cabang geometri yang berbeda; diferensial geometri, geometri aljabar, analisis geometrik; dibedakan sebagian oleh objek studi dan sebagian oleh perangkat yang berbeda dibawa untuk menanggung atas objek studi. Dalam geometri diferensial, misalnya, benda-bendanya adalah kurva dan permukaan dalam ruang yang kompleks dan alat sebagian besar muncul dari diferensial kalkulus. Geometri aljabar adalah ilmu yang mempelajari benda-benda yang dapat dideskripsikan dengan menggunakan fungsi rasional dan alat muncul biasanya, tetapi tidak selalu, dari modern aljabar (Dillon, 2018).

Banyak matematikawan yang berspesialisasi dalam geometri tidak membicarakan hal serupa segitiga atau sudut interior alternatif atau sudut dalam lingkaran atau sebagian besar lainnya hal-hal yang mungkin Anda pikirkan ketika memikirkan geometri sekolah, yaitu, Geometri Euclides. Bagian dari geometri Euclidean yang muncul di banyak cabang geometri yang dipelajari saat ini adalah geometri proyektif. Meskipun ini bukan kursus dalam geometri proyektif, kita akan mempelajari bidang proyektif tertentu. Di dalam dan dengan

cara lain, kursus ini membentuk jembatan dari geometri sekolah menengah ke lebih banyak lagi studi lanjutan. Objek fundamental dalam studi geometri aljabar adalah jenis aljabar dimana manifestasi geometris dari akar sistem bersuku banyak sehingga bisa diketahui berbagai kurva aljabarik yaitu garis, parabola, elips, dan kurva eliptik (Alfaris, 2022).

Geometri yang kita pelajari mungkin adalah suatu sintetis dari Geometri Euclides. Geometri sintetik dimulai dari prinsip pertama: definisi, dan aksioma atau postulat, yang merupakan kebenaran mendasar yang dipegang tidak hanya untuk terbukti dengan sendirinya, tetapi sebenarnya tidak dapat dibuktikan. Inti dari subjek adalah sintesis logis yang diterapkan pada aksioma untuk mengungkap fakta yang menghubungkan objek-objek geometri.

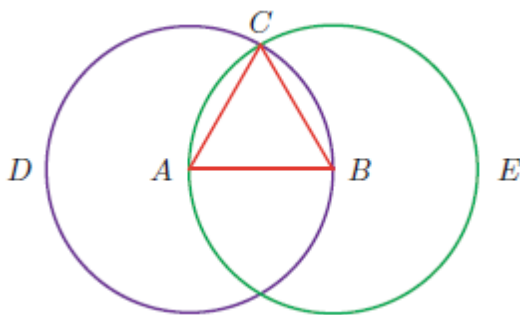
Geometri Planar Euclidean dapat dilihat sebagai geometri sisi lurus dan kompas. Tepi lurus tidak bertanda, jadi tidak dapat mengukur panjang, dan kompas itu floppy, artinya, kompas tidak tetap terbuka setelah Anda mengangkatnya dari halaman. Objek dan semua hubungan di antara mereka harus diproduksi hanya dengan menggunakan tepi lurus dan kompas diterapkan pada permukaan datar. Salah satu pendekatan untuk belajar Geometri Euclidean bersifat konstruktif, dan biasanya merupakan bagian dari sekolah menengah Tentu saja berkaitan dengan konstruksi yang sebenarnya. Dapat menguntungkan untuk memikirkan pendekatan sintetis, sebagian, sebagai penyediaan instruksi rinci untuk konstruksi yang diizinkan.

Karya yang membawa geometri sintetis ke dunia adalah *The Elements of Euclid*, analisis rinci geometri sintetis dan teori bilangan di tiga belas buku-buku yang berasal dari sekitar 300 SM. Tidak hanya *The Elements* telah dipelajari lebih atau kurang terus menerus sejak ditulis, itu tetap yang paling sumber penting untuk subjek selama 2300 tahun. Sejak saat itu ditulis, Elemen telah mengilhami volume komentar dan

teks beranotasi. Itu komentar berguna paling awal, oleh Proclus dari Alexandria, bertahan dari sekitar tahun 450.1 The Heath edisi bahasa Inggris dari The Thirteen Books of the Elemen oleh Euclid berasal dari tahun 1908. Sir Thomas L. Heath, seorang klasik Inggris, yang edisinya berisi banyak catatan dan komentar sejarah, yang dikerjakan dari edisi Yunani kontemporer yang telah dilakukan oleh Heiberg (Dillon, 2018).

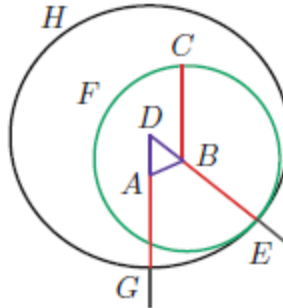
## 9.2 Konstruksi Dasar

Diberikan ruas garis  $AB$ , bentuklah dua lingkaran: satu dengan pusat  $A$  dan jari-jari  $AB$ , yang lain dengan pusat  $B$  dan jari-jari  $AB$ . Biarkan  $C$  menjadi titik di mana lingkaran berpotongan. Sebagai jari-jari lingkaran pertama,  $AB \cong AC$ . Sebagai jari-jari lingkaran kedua,  $BC \cong BA = AB$ . CN1,  $AC \cong BC$ . Tiga sisi  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$  adalah sedemikian rupa sehingga mereka kongruen satu sama lain, dan segitiga  $\triangle ABC$  adalah sama sisi.



**Gambar 9.1** Bangun segitiga sama sisi dari segmen

Diberikan segmen garis dan sembarang titik pada bidang, kita dapat membangun segmen garis kongruen yang berasal dari titik.



**Gambar 9.2** Bangun segmen di suatu titik

Misalkan A adalah titik dan BC adalah ruas garis. Bentuklah segmen AB dan gunakan untuk membangun segitiga sama sisi  $\triangle ABD$ . Dengan menggunakan B sebagai pusat dan BC sebagai jari-jari, bentuklah sebuah lingkaran. Perluas DB segmen ke potong lingkaran di E, dan ambil titik F lain pada lingkaran ini. sebagai jari-jari CEF,  $BC \cong BE$ .

Bentuk lingkaran lain dengan pusat D dan jari-jari DE. Perluas segmen DA untuk memotong lingkaran ini di G, dan mengambil titik lain H pada lingkaran ini. sebagai jari-jari dari EGH,  $DE \cong DG$ .  $DA \cong DB$ , kami dapat mengajukan banding ke CN3 untuk menyimpulkan bahwa setelah menghapus segmen DA dari DG dan DB dari DE, kami mendapatkan kongruen sisa  $AG \cong BE$ .  $BC \cong BE$ ,  $AG \cong BC$  sesuai keinginan.

### 9.3 Teorema Phytagoras

Dalam dunia matematika, teorema Pythagorean, juga disebut teorema Pythagoras, suatu hubungan mendasar dalam geometri Euclidean di antara tiga sisi suatu segitiga siku-siku. Hal ini menjelaskan bahwa luas kotak yang sisinya adalah sisi miring sama dengan jumlah luas kotak di dua sisi lainnya (Sally, 2007).

## DAFTAR PUSTAKA

- Dillon, M. I. 2018. *Geometry through history*. Springer International Publishing.
- Alfaris, L. 2022. *Geometri. Dalam Ariyanto (Ed.), Konsep Dasar Matematika (pp. 81-90)*. Padang: GET Press.
- Sally, J. D. 2007. Roots to research: a vertical development of mathematical problems Vol. 48. *American Mathematical Soc.*



# BAB X

## KOMBINATORIK

Oleh Ilfa Stephane

### 10.1 Pendahuluan

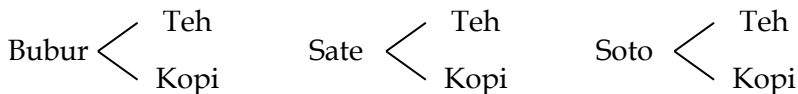
Kita sering membicarakan jumlah plat nomor yang bisa dibuat jika negara X memiliki kebijakan bahwa plat nomor terdiri dari 4 digit angka diikuti dua huruf dan angka pertama tidak boleh nol. Kombinatorik dapat membantu kita mengatasi masalah ini. Kombinatorik adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari susunan objek-objek untuk memperoleh penyelesaian berupa banyaknya cara menyusun objek-objek tersebut secara keseluruhan. Kombinatorik berdasarkan hasil yang diperoleh dari suatu percobaan (*experiment*). Percobaan adalah suatu proses fisik yang hasilnya dapat diamati.

### 10.2 Kaidah Pencacahan

Sebuah pengujian dilakukan untuk menyalakan sebuah lampu pijar yang baru dibeli apakah dapat menyala atau tidak. Setiap lampu yang diuji hanya memiliki dua kemungkinan hasil, yaitu hidup (A) atau mati (M). Kaidah pencacahan mencoba menemukan berapa banyak hasil yang dapat muncul dalam beberapa pengujian yang berbeda. Hasil pengujian yang mungkin terjadi kemudian dapat dinyatakan sebagai himpunan  $P = \{A, M\}$  dan banyaknya kemungkinan hasil pengujian ( $n$ ) adalah 2.

Sebagai contoh lain, misalkan sebuah restoran menawarkan tiga jenis makanan, yaitu bubur, sate, dan soto, serta dua jenis minuman teh dan kopi. Jika setiap orang dapat

memesan satu jenis makanan dan satu jenis minuman, berapa pasang makanan dan minuman yang dapat dipesan? Dengan metode pencacahan, kita memiliki jumlah pasangan makanan dan minuman yang dipesan seperti berikut:



Kemungkinan jawaban dapat dinyatakan sebagai himpunan  $R$ , yaitu  $R = \{\text{BuburTeh}, \text{BuburKopi}, \text{SateTeh}, \text{SateKopi}, \text{SotoTeh}, \text{SotoKopi}\}$ . Jadi, jumlah pasangan makanan dan minuman yang dipesan ( $n$ ) adalah 6.

### 10.3 Kaidah Dasar Menghitung

Dua kaidah dasar menghitung yang digunakan sebagai dasar perhitungan dalam kombinatorial adalah kaidah penjumlahan (*rule of sum*) dan kaidah dasar perkalian (*rule of product*).

#### 10.3.1 Kaidah Penjumlahan

Jika melakukan  $A$  dapat dilakukan dengan  $p$  cara dan melakukan  $B$  dapat dilakukan dengan  $q$  cara, sedangkan  $A$  dan  $B$  **tidak dapat melakukannya bersama-sama**, maka  $A$  dan  $B$  dapat melakukannya dengan  $p + q$  cara. Artinya, jika kita memiliki dua kasus yang mungkin terjadi namun tak mungkin terjadi secara bersamaan, atau jika kita hanya dapat melakukan salah satu hal atau hal lain saja, maka jumlahkan keduanya.

Untuk lebih memahami kaidah penjumlahan, perhatikan contoh berikut.

### **Contoh 1**

Selama perjalanan konser ke Bogor, Bimbim dapat menggunakan mobil, sepeda motor, atau bus yang telah disiapkan oleh pihak penyelenggara. Dengan menggunakan kaidah penjumlahan, kita bisa menentukan bahwa ada 3 pilihan kendaraan yang bisa Bimbim pilih untuk menuju konser.

### **Contoh 2**

Ada dua cara untuk pergi dari Jakarta ke Padang, baik dengan pesawat terbang atau bus. Untuk pesawat terbang ada 3 maskapai penerbangan dan bus ada 2 armada bus. Dengan menggunakan kaidah penjumlahan, kita dapat menentukan banyaknya kemungkinan perjalanan dari Jakarta ke Padang, yaitu sebanyak  $3 + 2 = 5$  perjalanan.

### **Contoh 3**

Sebuah organisasi mahasiswa (ormawa) memiliki 20 mahasiswa laki-laki dan 25 mahasiswa perempuan. Dengan kaidah penjumlahan, dimungkinkan untuk menentukan banyaknya cara untuk memilih seorang mahasiswa di ormawa (tanpa memandang jenis kelamin) menjadi ketua, yaitu sebanyak  $20 + 25 = 45$  cara.

## **9.3.2 Kaidah Perkalian**

Jika melakukan  $A$  dapat dilakukan dengan  $p$  cara dan untuk melakukan  $B$  dapat dilakukan dengan  $q$  cara **tidak tergantung** pada bagaimana  $A$  dilakukan, maka untuk melakukan  $A$  dan  $B$  dapat dilakukan dengan  $p \times q$  cara. Kaidah perkalian seperti yang disebutkan di atas juga dapat dipahami sebagai kaidah pengisian tempat yang tersedia. Untuk dapat

mengetahui dan memahami lebih jauh tentang kaidah perkalian, perhatikan contoh berikut.

#### **Contoh 4**

Berapa banyak kata yang terdiri dari 3 huruf dapat dibuat dari huruf A, K, U jika pengulangan diperbolehkan?

##### ***Penyelesaian***

Ada 3 tempat kosong yang bisa diisi untuk membentuk kata dari 3 huruf yang tersedia yaitu tempat kosong pertama bisa diisi dengan 3 huruf, tempat kosong kedua dan ketiga juga bisa diisi dengan 3 huruf karena pengulangan diperbolehkan. Jadi, ada  $3 \times 3 \times 3 = 27$  kata yang dapat dibuat dari 3 huruf yang tersedia.

#### **Contoh 5**

Dari lima bilangan 1,2,3,4,5 akan disusun bilangan genap terdiri dari 3 angka. Berapa banyak bilangan yang dapat disusun jika bilangan tersebut boleh ada yang sama dan jika tidak boleh ada yang sama?

##### ***Penyelesaian***

*Jika boleh ada yang sama:* Urutan pertama (ratusan) bisa memilih 5 angka. Urutan kedua (puluhan) bisa memilih 5 angka. Urutan ketiga (satuan) bisa memilih 2 angka (karena dari 5 angka yang diberikan hanya ada 2 angka genap yaitu angka 2 dan angka 4). Dengan menggunakan kaidah perkalian, maka banyaknya bilangan genap yang dapat disusun adalah  $5 \times 5 \times 2 = 50$  bilangan.

*Jika tidak boleh ada yang sama, maka kita mulai dengan satuan:* Urutan ketiga (satuan) bisa memilih 2 angka. Urutan kedua (puluhan) bisa memilih 4 angka. Urutan pertama (ratusan) bisa memilih 3 angka. Dengan menggunakan kaidah perkalian, banyaknya bilangan genap yang dapat disusun adalah  $2 \times 4 \times 3 = 24$  bilangan.

### Contoh 6

Dalam suatu rapat dewan direksi pemegang saham diadakan pemilihan manajemen perusahaan meliputi direktur utama (CEO), direktur keuangan (CFO), dan direktur personalia (HR *Director*). Ada 2 orang kandidat yang akan dipilih untuk posisi CEO, 3 orang untuk CFO, dan 2 orang untuk HR *Director*. Ada berapa cara untuk membentuk struktur kepemimpinan perusahaan tersebut?

#### **Penyelesaian**

Pengisian tiga jabatan manajemen perusahaan dapat menggunakan kaidah perkalian sehingga banyak cara susunan direksi perusahaan adalah  $2 \times 3 \times 2 = 12$  cara.

Selanjutnya, diberikan dua contoh yang akan menggambarkan perbedaan antara kaidah penjumlahan dan kaidah perkalian. Contoh 7 menunjukkan bagaimana menerapkan dua prinsip di atas untuk dua masalah yang berbeda, sedangkan contoh 8 menggabungkan dua prinsip di atas untuk menyelesaikan satu masalah.

### Contoh 7

Dalam susunan bilangan terdapat 4 bilangan genap yaitu 2, 4, 6, dan 8 serta lima bilangan ganjil yaitu 1, 3, 5, 7, dan 9. Apabila akan dipilih satu bilangan dari seluruh bilangan yang ada maka dengan menggunakan kaidah penjumlahan, hal tersebut dapat dilakukan dalam  $4 + 5 = 9$  cara. Namun, jika kita memilih dua bilangan yang terdiri dari bilangan genap dan ganjil, dapat dilakukan dengan menggunakan kaidah perkalian dalam  $4 \times 5 = 20$  cara.

### Contoh 8

Misalkan pada sebuah keranjang berisi 5 buah apel, 6 buah jeruk, dan 10 buah mangga. Akan dipilih 2 buah dari 2 jenis yang berbeda. Berapa banyak cara yang dapat dilakukan?

### ***Penyelesaian***

Perhatikan bahwa pemilihan dua jenis buah yang berbeda dapat dilakukan dengan tiga cara yang berbeda yaitu: *cara pertama* yaitu memilih apel dan jeruk, *cara kedua* yaitu memilih apel dan mangga, dan *cara ketiga* memilih jeruk dan mangga. Dengan menggunakan kaidah perkalian, kita melihat banyaknya cara memilih apel dan jeruk adalah  $5 \times 6 = 30$  cara, banyaknya cara memilih apel dan mangga adalah  $5 \times 10 = 50$  cara, dan banyaknya cara memilih jeruk dan mangga, ada  $6 \times 10 = 60$  cara. Selanjutnya, dengan menggunakan kaidah penjumlahan, kita melihat bahwa banyak cara untuk memilih 2 buah dari 2 jenis yang berbeda adalah  $30 + 50 + 60 = 140$  cara.

Pada Contoh 8, jika kita ingin memilih dua buah sebarang, ada 21 cara untuk memilih buah yang pertama karena kita tahu bahwa jumlah buah adalah  $5 + 6 + 10 = 21$  buah. Pilihan kedua memiliki  $21 - 1 = 20$  pilihan. Di sini, jumlah pilihan buah kedua dikurangi satu karena buah pertama sudah diambil. Jadi memilih dua buah sebarang dapat dilakukan dalam  $21 \times 20 = 420$  cara.

## **10.4 Permutasi**

Tidak ada aturan yang pasti untuk menjawab pertanyaan tentang berapa banyak hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan. Secara umum, biasanya dipakai salah satu atau gabungan dari beberapa pendekatan yang disebut permutasi.

### **Definisi**

Susunan beberapa objek yang berbeda dalam urutan linier menggunakan setiap objek tepat satu kali disebut permutasi dari objek-objek ini. Bilangan  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1$  adalah permutasi dari  $n$  objek yang disebut  $n$  faktorial, dan dinotasikan dengan  $n!$  (Miklos Bona, 2016).

### Contoh 9

Berapa banyak tiga warna yang dapat kita buat dengan menggunakan warna hitam (H), kuning (K), dan merah (M)?

#### ***Penyelesaian***

Jumlah 3 warna yang bisa kita buat adalah  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ . Kita dapat mendaftarkan enam warna yaitu: HKM, HMK, KHM, KMH, MHK, DAN MKH.

### 10.4.1 Permutasi $n$ Objek

Permutasi dari  $n$  objek adalah banyaknya cara untuk menempatkan  $n$  objek yang berbeda dalam  $n$  sel kosong sehingga setiap sel berisi tepat satu objek. Permutasi dari  $n$  objek biasanya dilambangkan dengan  $P(n, n)$  atau  $P_n^n$  dan dapat dinyatakan sebagai

$$P(n, n) = n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n-1)! \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n, & n > 0 \end{cases}$$

Untuk mengetahui dan memahami lebih baik tentang permutasi  $n$  objek, perhatikan contoh berikut.

### Contoh 10

Ada berapa cara untuk menjadwalkan 5 kegiatan jika tidak mungkin memiliki dua kegiatan yang dijadwalkan pada waktu yang sama?

#### ***Penyelesaian***

Banyaknya cara untuk menjadwalkan 5 kegiatan jika dua kegiatan tidak dapat dijadwalkan secara bersamaan adalah  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ .

### Contoh 11

Tentukan banyak cara agar 3 mahasiswa Jurusan Sistem Informasi (SI), 4 mahasiswa Informatika (IF), 4 mahasiswa Bisnis Digital (BD), dan 2 mahasiswa Manajemen Ritel (MR)

dapat duduk berjajar sehingga mereka dari jurusan yang sama duduk bersebelahan!

### **Penyelesaian**

4 jurusan menghasilkan  $4!$  cara duduk. Untuk mahasiswa SI ada  $3!$  cara duduk berkelompok, untuk mahasiswa IF ada  $4!$  cara duduk berkelompok, untuk mahasiswa BD ada  $4!$  cara duduk berkelompok, untuk mahasiswa MR ada  $2!$  cara duduk berkelompok. Dengan demikian, banyaknya cara duduk berkelompok adalah  $4! 3! 4! 4! 2! = 165.888$  cara.

## **10.4.2 Permutasi $r$ Obyek dari $n$ Obyek**

Misalkan  $A$  adalah himpunan dengan  $n$  anggota berbeda dan  $r$  bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan  $n$ . Permutasi  $r$  dari  $n$  anggota  $A$  adalah susunan berurutan dari  $r$  anggota  $A$  atau mengambil  $r$  anggota  $A$  secara bergantian tanpa pengembalian. Jadi banyaknya susunan yang mungkin dari  $r$  anggota  $A$  (mengambilnya secara bergiliran tanpa pengembalian) yang mungkin adalah  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$ . Notasi  $P(n, r)$  digunakan untuk menyatakan banyaknya permutasi dari  $r$  objek diantara  $n$  objek yang terjadi. Jadi

$$P(n, r) = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Untuk dapat lebih mengetahui dan memahami permutasi  $r$  objek dari  $n$  objek, dapat diperhatikan contoh berikut.

### **Contoh 12**

Banyaknya cara mengambil 5 kelereng satu demi satu dari 10 kelereng yang berbeda secara bergantian adalah

$$P(10, 5) = P_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 30.240 \text{ cara.}$$

### Contoh 13

Misalkan  $A$  adalah himpunan pasangan berurutan dari dua bilangan genap berbeda yang kurang dari 10. Maka banyaknya pasangan berurutan yang termasuk dalam  $A$  adalah

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12 \text{ pasang, yaitu:}$$

$$A = \{(2,4), (2,6), (2,8), (4,2), (4,6), (4,8), (6,2), (6,4), (6,8), (8,2), (8,4), (8,6)\}$$

### Contoh 14

Banyaknya susunan tiga huruf yang berbeda di antara lima huruf  $A, B, C, D, E$  adalah  $P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$ .

### 10.4.3 Permutasi Siklik

Permutasi dari  $n$  objek berbeda yang disusun secara melingkar dilambangkan dengan

$$P = (n - 1)!$$

### Contoh 15

Raisa, Aril, Mega, dan Budi akan mengadakan pertemuan bersama di meja bundar. Berapa banyak cara mereka bisa duduk mengelilingi meja?

#### *Penyelesaian*

diketahui bahwa jumlah peserta pertemuan  $(n) = 4$ , jadi  $P = (n - 1)! = (3 - 1)! = 3! = 6$  cara.

### Contoh 16

Berapa cara 3 pasang suami istri dapat duduk mengelilingi meja jika:

- (i) Seorang pria dan seorang wanita duduk berselang-seling?
- (ii) Apakah setiap suami dan istri duduk bersebelahan?

#### *Penyelesaian*

- (i) Pertama, 3 pria dapat duduk melingkar dengan  $(3 - 1)!$  cara. Selanjutnya, 3 wanita dapat menempati 3 tempat

di antara pria dengan  $3!$  cara. Jadi totalnya terdapat  $(3 - 1)! \times 3! = 2 \times 6 = 12$  cara duduk.

- (ii) Jika kita menganggap setiap pasangan suami istri sebagai 1 objek, maka ada  $(3 - 1)!$  cara duduk melingkar 3 pasangan suami istri. Namun, setiap pasangan bisa duduk di sebelah pasangannya dengan 2 cara (suami di sebelah kiri atau sebaliknya). Karena ada 3 pasangan, maka total ada  $(3 - 1)! \times 2^3 = 2 \times 8 = 16$  cara duduk seperti ini.

#### 10.4.4 Permutasi Majemuk

Permutasi majemuk yang sering disebut permutasi dengan pengulangan adalah banyaknya permutasi dari  $n$  objek dengan jumlah  $n_1$  yang sama, jumlah  $n_2$  yang sama, dan seterusnya sampai terdapat  $n_r$  yang sama.

##### Definisi

Banyaknya cara  $n$  objek dengan sejumlah  $r_1$  serupa, sejumlah  $r_2$  serupa, sedemikian sehingga sejumlah  $r_k$  serupa didefinisikan sebagai

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

Dimana  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$  (Russell Merriis, 2003).

#### Contoh 17

Sebuah kata terdiri dari 9 huruf, disusun dari kata "MAHASISWA". Hitunglah banyak kemungkinan kata yang berbeda!

##### Penyelesaian

Kita tahu bahwa jumlah huruf yang tersedia ( $n$ ) = 9, huruf yang sama terdiri dari: 3 Huruf A, 2 huruf S, dan 1 huruf M, H, I, W. Jadi, banyaknya kemungkinan kata berbeda yang dapat dibentuk dari kata MAHASISWA adalah  $\frac{9!}{3!2!1!1!1!1!} = 30.240$ .

### Contoh 18

Tentukan banyak cara untuk menyusun 2 mobil, 3 sepeda motor, 3 sepeda, dan 4 becak pada sebuah tempat parkir umum sedemikian sehingga:

- (i) Semua kendaraan yang sejenis letaknya bersebelahan?
- (ii) Letak kendaraan dalam susunan bebas?

### *Penyelesaian*

- (i) Terdapat 4 jenis kendaraan yang berbeda, berarti ada  $4!$  cara untuk menyusun kendaraan dalam 4 jenis yang berbeda ini. Untuk setiap jenis kendaraan, ada  $2!$  cara pengaturan mobil,  $3!$  cara pengaturan motor,  $3!$  cara pengaturan sepeda, dan  $4!$  cara pengaturan becak. Jadi, jumlah total susunan kendaraan adalah  $4! \times 2! \times 3! \times 3! \times 4! = 41.472$  cara.
- (ii) Ada 12 kendaraan yang diatur secara bebas. Hal ini merupakan permasalahan permutasi dengan beberapa objek yang sejenis, jadi banyaknya cara menyusun mobil adalah  $\frac{12!}{2!3!3!4!} = 277.200$  cara.

## 10.5 Kombinasi

Kombinasi adalah cara untuk memilih (mendapatkan) atau mengurutkan beberapa objek tanpa memperhatikan urutan objek tersebut. Dengan kata lain, pemilihannya terjadi seolah-olah dilakukan sekaligus, bukan satu per satu. Kombinasi sebenarnya adalah himpunan bagian karena anggota suatu himpunan bagian tersebut tidak bergantung pada urutannya.

### 10.5.1 Kombinasi $n$ Objek

Kombinasi  $n$  objek adalah banyaknya urutan dari  $n$  objek yang identik. Dalam pengaturan ini, urutan objek tidak diperhitungkan. Kombinasi  $n$  objek dilambangkan dengan

$$C(n, n) \text{ atau } C_n^n \text{ atau } \binom{n}{n} \text{ dengan } \binom{n}{n} = 1.$$

Untuk memahami masalah kombinasi, pertama-tama perhatikan contoh berikut.

### Contoh 19

Berapa banyak cara untuk menyusun 3 apel identik ke dalam tiga kotak kosong sehingga setiap kotak berisi 1 apel, ada 1 cara karena 3 apel tersebut identik tidak memiliki perbedaan dalam pengaturannya.

### 10.5.2 Kombinasi $r$ Objek dari $n$ Objek

Kombinasi  $r$  objek dari  $n$  objek dilambangkan dengan  $C(n, r)$  atau  $C_r^n$  atau  $\binom{n}{r}$ . Kombinasi  $r \leq n$  objek dari  $n$  objek yang tersedia dirumuskan:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Untuk memahami masalah kombinasi, pertama-tama perhatikan contoh berikut.

### Contoh 20

Ada beberapa kemungkinan susunan 3 huruf dari 4 huruf yang tersedia: K, A, M, U, yaitu:

| Kombinasi | Permutasi                    |
|-----------|------------------------------|
| KAM       | KAM, KMA, AKM, AMK, MKA, MAK |
| KAU       | KAU, KUA, AKU, AUK, UKA, UAK |
| KMU       | KMU, KUM, MKU, MUK, UKM, UMK |
| AMU       | AMU, AUM, MUA, MAU, UAM, UMA |

Jadi, ada 3 kemungkinan susunan 3 huruf dari 4 huruf yang tersedia jika dilakukan dengan kombinasi dan ada 20 kemungkinan susunan 3 huruf dari 4 huruf yang tersedia jika dilakukan dengan permutasi.

### Contoh 21

Banyaknya cara memilih 6 orang dari 30 orang adalah

$$C(30,6) = \frac{30!}{24!6!} = \frac{25 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30}{6!} = 953.775 \text{ cara.}$$

### Contoh 22

Banyaknya cara 5 orang dapat berjabat tangan adalah

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \times 5}{2!} = 10 \text{ cara, karena setiap jabat tangan dilakukan oleh dua orang.}$$

### Contoh 23

Sebuah sanggar tari memiliki 15 penari, terdiri dari 9 penari pria dan 6 penari wanita. Sanggar tari telah menciptakan tari kreasi baru yang membutuhkan 5 penari pria dan 3 penari wanita. Ada berapa cara untuk menentukan komposisi penari yang mengikuti tari kreasi?

#### *Penyelesaian*

Banyaknya cara memilih 5 penari pria adalah  $C(9,5) = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = 126$  cara. Banyaknya cara memilih 3 penari wanita

adalah  $C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$  cara. Jadi, banyaknya cara menentukan komposisi penari yang terdiri dari 5 penari pria dan 3 penari wanita adalah  $126 \times 20 = 2520$  cara.

### Contoh 24

Dari 10 diplomat muda Indonesia, dalam berapa cara bisa membentuk sebuah perwakilan terdiri dari 5 anggota sehingga:

- (i) Selalu ada diplomat bernama R.
- (ii) Diplomat bernama U tidak disertakan.
- (iii) Selalu ada diplomat bernama R, tapi diplomat bernama U tidak disertakan.
- (iv) Selalu ada seorang diplomat bernama U, tetapi diplomat bernama R tidak disertakan.

- (v) Diplomat bernama R dan U selalu disertakan.
- (vi) Memiliki setidaknya satu diplomat bernama R dan U.

***Penyelesaian***

- (i) Diplomat bernama R selalu disertakan, yang berarti ada  $C(9,4) = 126$  cara.
- (ii) Tidak termasuk diplomat bernama U, yaitu ada  $C(9,5) = 126$  cara.
- (iii) Karena U tidak termasuk, ada 9 orang tersisa. Karena R selalu disertakan, itu berarti kita hanya perlu 4 dari 8 orang, yaitu  $C(8,4) = 70$  cara.
- (iv) Karena R tidak termasuk berarti tinggal 9 orang. Karena U selalu termasuk berarti tinggal memilih 4 dari 8 orang, yaitu sebanyak  $C(8,4) = 70$  cara.
- (v) Diplomat bernama R dan U selalu disertakan, yang berarti ada  $C(8,3) = 56$  cara.
- (vi) Setidaknya ada satu diplomat bernama R dan U. Banyaknya cara yang dipilih adalah jumlah dari poin (iii), (iv), dan (v) yaitu sebanyak  $70 + 70 + 56 = 196$  cara.

## DAFTAR PUSTAKA

- Miklos Bona. 2016. *Walk Through Combinatorics, A: An Introduction To Enumeration And Graph Theory (Fourth Edition)*. Fourth Edi. World Scientific Publishing Company. Available at:  
[https://play.google.com/store/books/details/Miklos\\_Bona\\_Walk\\_Through\\_Combinatorics\\_A\\_An\\_Introd?id=uZRIDQAAQBAJ](https://play.google.com/store/books/details/Miklos_Bona_Walk_Through_Combinatorics_A_An_Introd?id=uZRIDQAAQBAJ).
- Russell Merris. 2003. *Combinatorics: Edition 2*. John Wiley & Sons. Available at:  
<https://play.google.com/books/reader?id=OM3CP4i58b4C&pg=GBS.PA5&hl=id>.



## BIODATA PENULIS



### **Meilida Eka Sari, M.Pd.Mat.**

Dosen Institut Agama Islam (IAI) Al-Azhaar Lubuklinggau

Penulis lahir di Kota Lubuklinggau pada tanggal 22 MEI 2089 Kota Palembang Sumatera Selatan. Pendidikan Sarjana atau S1 Pendidikan Matematika ditempuh di Sekolah Tinggi Keguruan Ilmu Pendidikan (STKIP) PGRI Lubuklinggau selesai tahun 2012. Pengalaman mengajar pada sekolah SMP N 13 Lubuklinggau Tahun 2007-2010 dan sekarang di Institut Agama Islam (IAI) Al-Azhaar Lubuklinggau. Pada Tahun 2017 menjabat ketua Prodi Pendidikan Guru Madrasah Ibtidaiyah (PGMI) kemudian tahun 2020 menjabat ketua Prodi Pendidikan Islam Anak Usia Dini (PIAUD). Aktif juga di organisasi Asosiasi Dosen PTKIS Indonesia (ADPETISINDO) wilayah Sumater Selatan. Karya Tulis Dasar-Dasar Pendidikan (2021), Model-Model Pembelajaran (2021), Filsafat Pendidikan Matematika (2022), Pengembangan Bahan Ajar (2022). Metode Kuantitatif (2022).

## BIODATA PENULIS



### **Nur Hasanah, M.Pd.**

Dosen Pendidikan Matematika

Penulis lahir di Sumenep tanggal 10 April 1997. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP PGRI Situbondo. anak pertama dari dua bersaudara, pasangan Suyoto, S.Pd dan ibu Mu'isa saat ini menetap di Ponpes. Tarbiyatul Mutaallimin yang beralamat di Kabupaten Situbondo Telp. 082337604494. Pendidikan Formal saat SD Negeri II Kropoh Raas yang beralamat Dusun Jati Rt.01 Rw.01 Desa Kropoh Kab. Sumenep, SMP Negeri 1 Raas Sumenep yang terletak di Desa Brakas Kab.Sumenep, pada jenjang SMA Negeri 1 Panji Situbondo yang terletak di Jl. Argopuro No. 1 A Kab. Situbondo, S1 STKIP PGRI Situbondo beralamat di Jl. Argopuro Gg. VII dan jenjang magister di Universitas Jember Jl. Kalimantan 37 Kampus Tegalboto Jember. Karir menjadi pengajar dimulai pada tahun 2011 yang berawal mengajar di TPQ Ar Rahmah Mimbaan Panji Situbondo pada saat jenjang pendidikan sekolah menengah atas hingga saat ini, setelah menyelesaikan kuliah jenjang sarjana mengajar di anak usia dini (Kelompok Bermain) KB Nurul Fityan Alasmalang Panarukan Situbondo sambil lalu melanjutkan

kuliah jenjang magister di Universitas Jember setelah menyelesaikan kuliah di universitas jember melanjutkan karir di STKIP PGRI Situbondo.

## BIODATA PENULIS



### **Oktaviana Nirmala Purba, S.Pd., M.Pd.**

Dosen Tetap Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan  
Yayasan Universitas Asahan pada

Oktaviana Nirmala Purba, S.Pd., M.Pd. adalah dosen tetap Yayasan Universitas Asahan pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan mulai dari tahun 2015. Lahir di Medan, 3 Oktober 1985. Jenjang Pendidikan SD sampai SMA di jalani di kota asalnya, kemudian belajar di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) di Universitas Negeri Medan tahun 2004. Setelah lulus S-1 diterima menjadi tutor di Bengkel Study Mind Map Club (M2C) tahun 2004. Pada tahun 2013 melanjutkan study Pendidikan Magister Pendidikan di Universitas Negeri Medan. Pada tahun 2022 hingga tahun 2024 diberi amanat sebagai Gugus Kendali Mutu (GKM) pada Prodi Ilmu Hukum. Alamat rumah Perum Puri Rajeg BlokF-01/05 Tangerang. Alamat email [oktaviananirmalapurba@gmail.com](mailto:oktaviananirmalapurba@gmail.com).

## BIODATA PENULIS



### **Richard A.M. Napitupulu**

Dosen Tetap Prodi S1 Teknik Mesin  
Universitas HKBP Nommensen

Penulis lahir di kota Enrekang Kab. Enrekang Propinsi Sulawesi Selatan pada tanggal 26 Agustus 1973. Menyelesaikan pendidikan Sarjana di Jurusan Teknik Mesin Universitas Sumatera Utara pada tahun 1997, dan pendidikan Magister di Jurusan Teknik Mesin Program Studi S2 Teknik Mesin Universitas Indonesia pada tahun 2000. Kemudian melanjutkan Pendidikan Doktor di Program Studi S3 Teknik Metalurgi dan Material Universitas Indonesia pada Agustus 2007 dan lulus pada bulan Februari tahun 2012. Pada tahun 1998-2003 bekerja sebagai dosen tidak tetap pada Prodi S1 Teknik Mesin dan Prodi S1 Teknik Industri di beberapa universitas di Jakarta (UKI, UKRIDA, UNKRIS, IT Al-Kamal). Sejak tahun 2003 bekerja sebagai dosen tetap di Prodi S1 Teknik Mesin Universitas HKBP Nommensen, dan merupakan Editor in Cief dari OJS SJoME (Sprocket Journal of Mechanical Engineering) dan CISat (Citra Sains Teknologi). Selama bertugas sebagai dosen menulis beberapa judul buku, aktif sebagai narasumber maupun chairman pada beberapa *international conference* baik yang diadakan di dalam maupun di luar negeri, dan juga aktif sebagai reviewer di beberapa OJS Nasional dan Jurnal Internasional.

## **BIODATA PENULIS**



**Wilminche M. D. E. L. Kelen, M.Pd.**  
Staf Dosen Pendidikan Matematika IKTL

Penulis lahir di Flores Timur tanggal 11 Juli 1982. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka (IKTL). Menyelesaikan pendidikan S1 di Institut Keguruan dan Teknologi Larantuka dan melanjutkan S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika Program Magister Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

## **BIODATA PENULIS**



### **Miduk Tampubolon**

Dosen Tetap Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik  
Universitas HKBP Nommensen

Penulis lahir di Siborong-borong tanggal 11 September 1972. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas HKBP Nommensen. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika FMIPA USU dan melanjutkan S2 pada Jurusan Matematika FMIPA USU. Penulis menekuni bidang Matematika.

## BIODATA PENULIS



**Lucy Asri Purwasi, M.Pd.Mat.**

Dosen Universitas PGRI Silampari Kota Lubuklinggau

Penulis lahir di Manna Kabupaten Bengkulu Selatan, tanggal 06 Juni 1990. Penulis adalah dosen tetap yayasan (DTY) pada Program Studi Pendidikan Sekolah Dasar (PGSD), Universitas PGRI Silampari Kota Lubuklinggau, Propinsi Sumatera Selatan. Pada tahun 2012 menyelesaikan pendidikan S-1 pada Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Bengkulu dan pada tahun 2015 menyelesaikan studi S-2 pada Jurusan Pendidikan Matematika di Universitas Bengkulu. Penulis memiliki ketertarikan dalam bidang inovasi-inovasi pendidikan, terutama dalam pengembangan pembelajaran, sumber belajar, maupun media pembelajaran, hal ini ditandai dengan riwayat publikasi penelitian di beberapa jurnal nasional maupun kegiatan seminar internasional sejak terhitung tahun 2015 hingga saat ini. Buku yang pernah ditulis adalah terkait teknologi pengajaran dengan tema pengembangan strategis pembelajaran yang publish di pertengahan tahun 2022.

## **BIODATA PENULIS**



**Dr. Joni Wilson Sitopu, M.Pd.**  
Dosen Pendidikan Matematika  
Universitas Simalungun

Penulis lahir di Medan. Pendidikan S1, S2 dan S3 Prodi Matematika, Pendidikan Matematika, dan Matematika. Dosen di FKIP dan SPS Program S2 Universitas Simalungun. Aktif mengikuti sebagai pemakalah pada Seminar Nasional dan internasional, aktif menulis jurnal OJS, Sinta, dan Scopus, dan aktif mengikuti Seminar Nasional dan internasional.

## BIODATA PENULIS



**Aldi Cahya Muhammad, B.Sc.Engg., M.Sc.Engg.**  
Engineer di PT. Radiant Group Jakarta

Setelah lulus dari SMAN 1 Genteng Banyuwangi tahun 2013. Penulis melanjutkan studi dan lulus program Bachelors dan Masters of Science in Electrical and Electronic Engineering di salah satu universitas Organisasi Kerjasama Islam (OKI), Islamic University of Technology (IUT), Dhaka, Bangladesh lulus tahun 2019.

Karir pertama dimulai sebagai Bangladesh Business Manager di salah satu perusahaan Jepang, A-Wing Group. Setelah itu melanjutkan karir di perusahaan Radiant Group, Jakarta. Beberapa research interest penulis antara lain Artificial Intelligence and Renewable energy. Penulis pernah mendapat penghargaan sebagai Best Paper di The 7th Indonesia International Geothermal Convention and Exhibition (IIGCE) 2019.

Email Penulis: *aldicahyamu@gmail.com*

## **BIODATA PENULIS**



### **Ilfa Stephane**

Staf Dosen Prodi Sistem Informasi  
STMIK Indonesia Padang

Penulis lahir di Bukittinggi tanggal 26 Mei 1987. Penulis adalah dosen tetap pada Program Studi Sistem Informasi, STMIK Indonesia Padang. Menyelesaikan pendidikan S1 pada Jurusan Matematika dan melanjutkan S2 pada Jurusan Ilmu Matematika Universitas Andalas.